

La resistencia al corte en macizos rocosos y en el hormigón. Una metodología reciente de cálculo



Roberto ÚCAR NAVARRO



LA RESISTENCIA AL CORTE EN MACIZOS ROCOSOS Y EN EL HORMIGÓN.

Una metodología
reciente de cálculo

Roberto ÚCAR NAVARRO

MADRID

2023

Diseño, diagramación y cubierta del libro:
U.D.PROYECTOS
E.T.S.I .MINAS – Universidad Politécnica de Madrid
Ríos Rosas 21
28003, MADRID
Área de Investigación: Ingeniería del Terreno
Wilver Contreras Miranda

Segunda edición 2023
Roberto Úcar Navarro

ISBN: 978-1-70783-787-8

DEDICATORIA

A la memoria de mis queridos padres:

Pedro ÚCAR ECHEVERRÍA
Dorita NAVARRO DE ÚCAR

Con especial dedicación y cariño a mi esposa:
Damaris

A mis hijos:
Adriana, Jorge y Eduardo

A mis nietos:
Victoria, Isabella, Roberto, Jorge y Sofía

EL AUTOR

ROBERTO ÚCAR NAVARRO

Profesor Titular de la Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería. Ingeniero de Minas en la Universidad Central de Venezuela (U.C.V: 1971). M.Sc. en mecánica de rocas y obras subterráneas (Universidad de Missouri – Rolla, U.S.A: 1975). Doctorado en la Universidad de Mc Gill (Canadá, 1988). Profesor de mecánica de rocas y diseño de voladuras de rocas Escuela de Geología y Minas de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V, y del Departamento de Minas y Geofísica. Profesor de pregrado y postgrado (ULA: 1977-actualidad) en geología para ingenieros, resistencia de materiales avanzada, mecánica de suelos, geotecnia aplicada, diseño geotécnico de túneles, obras viales, geofísica y mecánica del medio continuo entre otras materias. Primer director fundador de la carrera de Ingeniería Geológica (ULA: 1984-1985). Posteriormente en 1994, jefe del Departamento de Vías de la Facultad de Ingeniería Civil; coordinación y enseñanza académica del curso de Geotecnia Aplicada en el postgrado de Ingeniería Vial. Desde el año 2006 hasta el 2010 a través de la empresa Hidroex, profesor de los cursos de mecánica de rocas aplicada a la estabilidad de hoyos en la industria petrolera. Asesor de importantes proyectos públicos y privados relacionados con obras subterráneas, pantallas atirantadas, estabilidad de taludes en suelos y macizos rocosos conjuntamente con la técnica de estabilización mediante tirantes anclados, así como en el diseño de voladuras controladas en obras a cielo abierto, galerías y túneles; análisis de la estabilidad y del soporte de taludes, nuevos criterios de rotura en macizos rocosos, a la estabilidad de hoyos en la industria petrolera, así como la ingeniería de confiabilidad y la probabilidad de falla. Autor de artículos en revistas indexadas y arbitradas, así como conferencista en congresos nacionales e internacionales. Premio Nacional de Ingeniería (1990), otorgado por el Colegio de Ingenieros de Venezuela. Diploma de Honor (ULA: 1993). Orden Tulio Febres Cordero (segunda clase), Asamblea Legislativa del Estado Mérida (1993). Presidente del Centro de Ingenieros del Estado Mérida (1993-1995). Premio Vicente Lecuna del Colegio de Ingenieros de Venezuela (1996). Premio Regional de Tecnología, mención Desarrollo Tecnológico (FUNDACITE Mérida: 2006). Individuo de Número de la Academia Nacional de la Ingeniería y el Hábitat (Sillón I) (2011). Miembro Correspondiente Estatal de la Academia de Mérida (2015). Individuo de Número, Sillón 17 a la Academia de Mérida (2021). Libros publicados: *Manual de Anclajes en Ingeniería Civil* (Madrid, España, 2004); Capítulo de libro: *Diseño de Túneles Ubicados en Zonas Sísmicas*, publicado en el Manual de Túneles y Obras Subterráneas, Volumen II, Madrid, España, 2011); *La Resistencia al Corte en Macizos Rocosos y el Hormigón. Una Metodología Reciente de Cálculo* (AMAZON, 2019). Profesor invitado en la Universidad de Mc Gill (Canadá); Universidad de Zaragoza, Politécnica de Madrid y Complutense de Madrid (España). E-mail: robertoucar@gmail.com



PRESENTACIÓN

La historia de este libro se remonta desde hace aproximadamente dos décadas, al proponer como tesis de maestría en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes (Mérida, Venezuela) un criterio empírico de rotura bidimensional para el hormigón y que también tuviese su aplicación en otros materiales como es el caso de las rocas. Adicionalmente, se construyó una cámara de compresión triaxial en la cual se llevaron a cabo las respectivas pruebas de resistencia con igual presión de confinamiento junto con los clásicos ensayos de compresión simple y a tracción.

Durante el proceso de investigación aplicando el referido criterio se pudo observar que la ecuación propuesta que vincula las tensiones principales se ajustaba bastante bien a los datos experimentales, dando además valores del error estándar inferiores al compararse con otros criterios de falla utilizados comúnmente en el análisis e investigación tanto en el campo de la ingeniería geotécnica como del hormigón.

Después de cierta inactividad se comenzó la segunda etapa de investigación, la cual fue la más difícil por los obstáculos y tropiezos encontrados al no poder determinar la solución analítica de la ecuación diferencial y por ende la envolvente de la curva plana a los círculos de rotura de Mohr. Afortunadamente siempre está la mano de Dios que con su presencia nos ha iluminado y guiado para hallar definitivamente la solución exacta de la curva de resistencia intrínseca.

Luego vino el tercer periodo de estudio con el propósito fundamental de obtener las constantes del material ensayado, aplicando ciertas condiciones de borde incorporadas al sistema de ecuaciones no lineales.

Por otra parte, al aplicar las técnicas y algoritmos utilizados a través de los conocidos métodos numéricos se obtenían un sin número de valores de las constantes en función de las condiciones iniciales del problema planteado.

Sin embargo, el rompecabezas se solucionó al analizar en detalle la curva cuadrática cuya sección cónica está representada por una parábola, tal como se intuía en el proceso de análisis a través de las útiles herramientas que nos confiere la geometría analítica, y la posterior transformación de la parábola en su forma ordinaria o canónica.

En estas condiciones, se determinó a través del concepto *latus rectum* (cuerda) de una sección cónica la correcta ubicación de la abscisa del foco en la rama positiva de la curva parabólica, evitando por lo tanto el inconveniente de obtener infinitas soluciones de las constantes involucradas en la ecuación que vincula las tensiones principales.

A este método analítico se le ha dado el nombre de ***Procedimiento del Foco***, el cual aplicando simples transformaciones algébricas se obtienen las constantes de rotura con un buen ***nivel de aproximación*** a través de una ecuación de segundo grado.

Todo esto, teniendo como datos iniciales únicamente el valor de la resistencia a tracción y compresión uniaxial, considerando la condición de la roca intacta o determinando la calidad del macizo rocoso con la ayuda de las denominadas clasificaciones geomecánicas.

Otra ventaja adicional del procedimiento analítico es que no se requiere conocer mediante las pruebas triaxiales los diferentes intervalos de las tensiones principales en el instante de falla, y por ende no se necesita aplicar la conocida técnica de ajuste de curvas por mínimos cuadrados para obtener las referidas constantes. Mediante ejemplos prácticos se comparan los resultados entre el criterio empírico de rotura propuesto en la presente obra, considerando varias clases de rocas, a través de pruebas triaxiales obtenidas de la recopilación de datos experimentales presentados por reconocidos investigadores. A la vez, se equipara en detalle con la hipótesis de Hoek y Brown, utilizando como índice de calidad la clasificación geomecánica de Bieniawski conocida como *Rock Mass Rating* (RMR).

También se presenta el cálculo analítico de las tensiones y parámetros resistentes teniendo en cuenta las pruebas experimentales en probetas cilíndricas de hormigón confinadas a igual presión y sometidas a compresión axial en dos casos específicos. Al calcular las constantes se

observó que los valores de la tensión principal de rotura daban resultados satisfactorios al comparase con los resultados experimentales incluyendo los ensayos realizados en rocas.

El libro está programado con una estructura central en la cual se desarrolla en forma pormenorizada el método desarrollado junto con ejemplos de aplicación. Luego se adjuntan varios apéndices que complementan la investigación con el propósito de que el lector no se aparte del núcleo principal del criterio de rotura propuesto.

A través de los apéndices se explica en forma sucinta el procedimiento matemático para determinar la envolvente a una familia de curvas, la transformación de la ecuación de la parábola de rotura en forma canónica, así como una descripción de los criterios de rotura en macizos rocosos, lo que ayuda a conocer el estado actual del conocimiento. Todo esto junto con otros temas que he considerado de interés, entre ellos la determinación por parte del autor de la curva de resistencia intrínseca aplicando el criterio original de Hoek y Brown y el de Murrell. Adicionalmente, se describen las ecuaciones que relacionan la cohesión y el ángulo de fricción interna con la resistencia a tracción y compresión simple de la roca. Su importancia se debe a que el criterio lineal de rotura de Mohr-Coulomb es ampliamente utilizado en el campo de la geotecnia, aun cuando presenta ciertas restricciones. Por otra parte, en el último apéndice se estudia la representación gráfica de los esfuerzos, lo que permite una mejor interpretación de los diferentes criterios de rotura en el plano desviador. A la vez, es oportuno indicar que a través del método desarrollado en esta obra es posible calcular también una envolvente linealizada del tipo Mohr-Coulomb equivalente conociendo previamente el nivel de la tensión normal. Esto se debe a la amplia divulgación del criterio lineal en reconocidos programas asistidos por el ordenador que analizan gran variedad de problemas aplicados comúnmente en el área de la ingeniería del terreno.

Un ejemplo práctico de linealización se lleva a cabo en el Apéndice C, y se compara con el criterio generalizado de Hoek y Brown (HB) empleando las ecuaciones desarrolladas por Kumar. Lamentablemente este método de cálculo de este último investigador, ha sido poco difundido, a pesar de que su aporte es de gran relevancia para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos aplicando la referida hipótesis de HB.

Asimismo, una vez desarrollada la ecuación de rotura bidimensional, el paso final ha sido adicionar el esfuerzo principal intermedio en dicha expresión analítica, por cuanto hay evidencias que demuestran que tiene una significativa influencia en la resistencia de la roca. En estas circunstancias, se ha obtenido un procedimiento de cálculo aproximado al

considerar un estado poliaxial de tensiones, lográndose buenos resultados al compararse con las pruebas experimentales realizadas por Mogi.

En definitiva, en esta modesta obra lo que se desea es desarrollar una metodología sencilla de fácil aplicación y con resultados confiables, sin necesidad de incursionar en el complejo campo del mecanismo de fractura. También, es importante destacar que el libro tiene como meta primordial colaborar sin ninguna presunción en la preparación de mejores ingenieros y estudiantes y, como corolario natural, lograr excelentes hombres en beneficio de la comunidad donde puedan aportar su experiencia y conocimientos.

No se ha olvidado al escribir estas páginas introductorias la deuda de gratitud con mi querida Universidad de Los Andes por darme la oportunidad de aprender enseñando. A la Universidad de Zaragoza (Departamento de Ciencias de la Tierra) en ocasión de poder investigar tan relevante tema concerniente con la rotura de rocas durante mi permanencia como profesor invitado.

A mi entrañable amigo y colega Profesor Dr. Carlos López Jimeno, que, con su constante interés y apoyo ha contribuido al mejoramiento de esta obra. También a sus colaboradores Teresa Matarranz y Antonio León por la ímproba labor en la transcripción de los originales. Igualmente, mi agradecimiento con la profesora Norly Belandria Rodríguez por su colaboración desinteresada en la revisión de las ecuaciones, tablas y gráficos, así como sus valiosos comentarios. Un reconocimiento especial a Javier Cerrada Márquez por profesionalismo demostrado con los excelentes dibujos y gráficos contenidos en esta obra.

Finalmente, deseo expresar mi sincera gratitud al profesor Wilver Contreras Miranda por su valiosa contribución en todo lo concerniente al asesoramiento y diseño del libro en formato digital. A través de esta herramienta, se facilita la lectura y el conocimiento empleando estos nuevos recursos tecnológicos de fácil acceso.

El lector puede estar convencido de que he puesto todo mi esfuerzo y entusiasmo para llevar a cabo esta difícil tarea, que con la ayuda de todos ustedes se logrará mejorar el objetivo de la presente obra. ***Laus Deo.***

Roberto ÚCAR NAVARRO

Profesor Titular de la Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela
Profesor invitado de la Universidad de Zaragoza, España
robertoucar@gmail.com

PRÓLOGO

En el entorno del profesor Roberto Úcar Navarro hay que contar con una familia con más iniciativas que recursos, exiliada de la guerra de España y obligada a rehacer vidas y haciendas pasando primero por Francia y luego cruzando el Atlántico hasta ser acogida en Venezuela por manos amistosas y solidarias. Luego, en lo personal, hay que contar con el tesón y voluntad de superación que le llevan a obtener resultados brillantes en todos los niveles de estudios (también en lo concerniente a los deportes, pero esto es otra historia), lo que desembocó en la obtención del título de Ingeniero de Minas por la Universidad Central de Venezuela (UCV), máster por la Universidad de Missouri y posteriormente un doctorado canadiense en la Universidad Mc Gill, ya como cabeza de familia y con las apreturas económicas que implicaba la renuncia a la aventura empresarial pero contando con el aliento del núcleo familiar y confianza de las autoridades académicas. Le sigue la carrera docente en la UCV, compaginada con la ejecución de numerosos proyectos de túneles ferroviarios y aspectos diversos de la geotecnia, generalmente relacionados con la estabilidad de taludes y control de calidad de obra. Luego vino la aventura de impulsar la creación de la Facultad de Ingeniería Geológica en la Universidad de Los Andes (ULA) y ejercer de director-fundador. Más tarde llegaron premios y condecoraciones, y su incorporación como individuo de número en la Academia Nacional de la Ingeniería y el Hábitat.

Con este bagaje no faltan ingredientes para escribir *casi cien años de entereza de espíritus* o *la casa sin soledad* o algún tema afín, capaz de agitar el mundo de la literatura iberoamericana. Se trataría solo de soltar la espontaneidad y tomar en consideración la sugerencia que se atribuye a Nietzsche, según la cual "*ni para vivir ni para escribir sirve de mucho un exceso de cálculo. Más bien conviene andar un poco desprevenidos*". Por el momento aquellos temas tendrán que esperar. Sin embargo, lo que ahora tenemos delante no está especialmente lejos de todo eso: Cálculo, el justo y necesario, que no es poco en este caso. Cierta espontaneidad en la estructura y organización tampoco falta. Si el lector pone de su parte el nivel de preparación necesario se dejará seducir por la belleza que se manifiesta en muy distintas facetas: Entrará de una manera muy directa en las ecuaciones que llevan al desarrollo del criterio de rotura "unificado" para roca sana, hormigones y materiales frágiles en general. Luego viene su aplicación a los macizos rocosos tomando en consideración los índices de calidad al uso y su traducción a parámetros de las ecuaciones, línea de investigación que culmina con la extensión del criterio de rotura para un estado poliaxial de esfuerzos. Pese a esta entrada en materia de forma tan directa, el lector verá que también tiene a los antecedentes más significativos, en una síntesis del "estado del arte" realizada con veneración religiosa por las aportaciones más significativas en las materias tratadas y con razonamientos contundentes sobre la conveniencia de introducir nuevos criterios o la comparación de los resultados del antes y el después. Los aspectos menos necesarios para los lectores más afines a la mecánica de rocas van a los anexos, con el mismo criterio de la didáctica seductora que tiene toda la obra. Y es que la actitud intelectual del profesor Úcar ante los libros no es del todo corriente. No es corriente que un estudioso se empape de un tratado científico hasta el punto de acordarse toda la vida hasta de la dirección del editor y que cuando viaja se esfuerce por comprobar si todavía existe el sitio con una reverencia parecida a la que le inspiran la catedral de Jaca, la presa de Almonacid de la Cuba, las ruinas de Belchite o las calles que pisaron sus ancestros.

En la Universidad de Zaragoza (Dpto. Ciencias de la Tierra) pudimos vivir de cerca la edición de su *Manual de Anclajes en Ingeniería Civil* en el periodo de disfrute de la condición de Profesor Invitado. Este periodo tenía el objetivo primordial de atender a la revisión-corrección-edición-presentación del libro, pero esta labor se compaginó con gestiones en el Rectorado para establecer convenios de colaboración entre universidades y, en el Departamento, con numerosas clases intercaladas de manera desinteresada en las asignaturas afines a la ingeniería geológica, conferencias en distintos organismos, cursos de especialización profesional en la propia Universidad y en la delegación del Colegio de Geólogos y, a

su vez, propició encuentros con editores, intercambios de documentación, suscripción de revistas especializadas, conferencias de responsables de empresas de geotecnia y de desarrollos informáticos para la ingeniería geológica etc. Un impulso decisivo para un Departamento que trataba de renovar el plan de estudios y potenciar las materias aplicadas a la ingeniería civil. En este cometido el profesor Úcar desplegó un sutil poder de seducción por el que hubo recién egresados que pudieron conducir sus aspiraciones laborales al descubrir el potencial de la ingeniería geológica. Los exalumnos y geólogos colegiados que pasaron por sus clases siguen teniendo presente la expresión “con seguridad les va a encantar” (con entonación venezolana) con que daba inicio a temas que hasta entonces les habían parecido inabordables.

Ahora celebramos (celebramos con todos los matices la palabra) la aparición de la nueva metodología para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos y en el hormigón, que es fruto de la experiencia de años de estudio del comportamiento de los macizos rocosos y de la fiabilidad de las clasificaciones geomecánicas al uso, de los ensayos de laboratorio de mecánica de rocas y de una singular destreza en el manejo de las ecuaciones que describen tales comportamientos. El desarrollo del nuevo criterio de rotura permite predicciones más ajustadas que las basadas en el criterio de Hoek y Brown. Es posible que lleve su tiempo vencer toda la inercia e implantarse de modo generalizado en la comunidad científico-técnica y en los protocolos de actuación de los proyectos de ingeniería civil y también en el control de calidad de los hormigones. Independientemente de este efecto esperable, el lector tendrá como efecto inmediato el acceso al conocimiento del desarrollo de los criterios de rotura. Por el momento es un auténtico privilegio para los hispano-hablantes y en particular para los seguidores de la línea tradicional del Editor, Carlos López Jimeno, que propicia con gran acierto el desarrollo y la difusión del conocimiento teórico y práctico de todo lo relacionado con la ingeniería geológica.

Andrés Pocoví Juan

Profesor titular emérito
Universidad de Zaragoza

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

LA MATRIZ ROCOSA Y EL HORMIGÓN

1.1. Introducción	2
1.2. Desarrollo matemático de las ecuaciones que permiten determinar la envolvente de rotura o curva de resistencia intrínseca.	7
1.3. Nuevo criterio de rotura propuesto	13
1.4. Determinación de la envolvente de rotura	15
1.5. Cálculo de la constante de integración k_4 - un ejemplo de aplicación	21
1.6. Estudio de la curva que representa la relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la rotura	26
1.7. Determinación de las ecuaciones que relacionan los parámetros k_1 , k_2 y k_4 (Constante de Integración) en la roca intacta y el hormigón	31
1.8. Determinación de las constantes k_1 y k_2 mediante una simple ecuación de segundo grado.....	40
1.9. Cálculo de las constantes - ejemplo comparativo	44
1.10. Comparación de resultados a través de las recopilaciones de Sheorey	49

1.11. Comparación de resultados a través de las investigaciones realizadas por Mogi	55
1.12. Determinación de la envolvente de rotura aplicando los estudios experimentales de Aire	69
1.13. Comparación de resultados aplicando diferentes criterios de rotura a través de los estudios experimentales realizados por Torres [11]	83

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE LA CURVA PLANA DE ROTURA EN MACIZOS ROCOSOS ..

2.1. Introducción.....	96
2.2. Cálculo de las constantes k_1 , k_2 y k_4 teniendo en cuenta el Índice de Calidad de la Roca	97
2.3. Comentarios finales.....	113

CAPÍTULO 3

CRITERIO APROXIMADO PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE LA ROCA CONSIDERANDO UN ESTADO DE ESFUERZO POLIAXIAL (TRIAxIAL VERDADERO)

3.1. Introducción.....	115
3.2. Determinación aproximada del parámetro k_3 - roca intacta y hormigón.....	120
3.3. Determinación del parámetro k_3 a través de la derivada direccional	124
3.4. Comparación de resultados considerando un estado de esfuerzo poliaxial en roca intacta.....	144
3.5. Criterio de rotura para un estado de esfuerzo poliaxial en macizos rocosos	161
Referencias.....	164

APÉNDICE A

DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS

1. Introducción	167
2. Determinación de la envolvente.....	168
3. Un ejemplo práctico para determinar la envolvente.....	170
4. Referencias.....	172

APÉNDICE B**ESTUDIO DE LA CURVA DE ROTURA A TRAVÉS DE LA RELACIÓN QUE VINCULA LAS TENSIONES PRINCIPALES σ_1 Y σ_3**

1. Introducción173
2. Determinación de la ecuación canónica de la parábola de rotura 174

APÉNDICE C**CRITERIOS EMPÍRICOS DE ROTURA**

1. Introducción182
2. Criterio original de rotura de Hoek y Brown187
3. Influencia y aplicación de los invariantes de esfuerzos en la rotura de las rocas. Comportamiento frágil y dúctil257
4. Criterios de rotura considerando el esfuerzo principal intermedio σ_2 273
5. Avances en las teorías de resistencias de materiales considerando diferentes estados de tensiones290
6. Referencias302

APÉNDICE D**DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE EN MACIZOS ROCOSOS APLICANDO EL CRITERIO DE MURREL - BIENIAWSKI**

- Resumen 308
1. Introducción 309
2. Determinación de la envolvente de falla por corte..... 310
3. Aplicación práctica 327
4. Conclusiones..... 332
5. Comentarios finales sobre la ecuación de rotura 333
6. Simbología 333
7. Referencias..... 335

APÉNDICE E

DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CIZALLAMIENTO EN MACIZOS ROCOSOS APLICANDO EL CRITERIO DE HOEK Y BROWN

1. Introduccion	338
2. Solución de la ecuación diferencial	351
3. Aplicacion práctica	355
4. Conclusiones	351
5. Referencias	358
6. Agradecimientos	358

APÉNDICE F

EXPRESIONES ANALÍTICAS AL APLICAR EL CRITERIO LINEAL DE ROTURA DE MOHR COULOMB

1.Introducción	359
2. Relación entre los parámetros resistentes - roca intacta	360
3. Ejemplo de aplicación a través del cálculo aproximado de los parámetros de corte, al considerar la persistencia de las discontinuidades.	369
4. Referencias	371

APÉNDICE G

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ESFUERZOS

1. Introducción	372
2. Generalidades	373
3. Proyección de los esfuerzos principales sobre el plano desviador	379
4. Determinación del Ángulo Lode θ	390
5. Ejemplos de aplicación	394
6. Referencias	419

CAPÍTULO I LA MATRIZ ROCOSA Y EL HORMIGÓN



I.1. INTRODUCCIÓN

El presente libro se fundamenta en una nueva ecuación cuadrática que vincula los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la falla, la cual permite obtener la resistencia al corte en rocas y en materiales de rotura frágil como el hormigón.

A través de este nuevo criterio empírico de rotura bidimensional se determina en la primera fase de cálculo la tensión normal actuando sobre el plano de rotura al resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, y posteriormente la envolvente de falla.

Para facilitar los cálculos la expresión que relaciona las tensiones principales σ_1 y σ_3 al ocurrir la rotura se ha expresado en forma adimensional, considerando la siguiente curva plana que tiene por ecuación:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2}$$

En la referida curva algebraica σ_c representa la resistencia a compresión sin confinar de la roca intacta (matriz rocosa) o del hormigón f'_c a los 28 días y por otra parte, $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$ es un parámetro adimensional cuyo cociente se obtiene al dividir la resistencia a la tracción σ_t entre σ_c

A través de estos valores de resistencia, junto con las constantes k_1 y k_2 , las cuales se determinan para el caso del hormigón o para un tipo de roca en particular; se logra por tanto conocer todos los parámetros involucrados en la expresión analítica entre las tensiones σ_1 y σ_3 del material investigado.

Igual procedimiento se ha llevado a cabo para calcular las mencionadas constantes valorando la calidad del macizo rocoso en función del grado de fracturación, rugosidad, tamaño del bloque, alteración y continuidad de las discontinuidades, entre otros factores al aplicar los conocidos índices geomecánicos como el RMR, GSI, Q o RMI.

Al considerar este modelo matemático conjuntamente con los conceptos básicos sobre contactos de curvas para obtener la envolvente de una familia de círculos de falla, se determina la tensión normal $\sigma_n = \psi(\beta)$ y la resistencia al corte $\tau_\alpha = \zeta(\beta)$ actuando sobre el plano de rotura.

Por lo tanto, ambas ecuaciones están definidas paramétricamente a través del ángulo β que forma la tangente a la envolvente falla con la horizontal, conocido también como ángulo de fricción interna instantáneo ϕ_i , el cual depende del nivel de tensiones.

Lo anterior indica que:

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_n} = \tan \beta = \tan \phi_i$$

Por otra parte, el cálculo analítico de la envolvente o curva de resistencia intrínseca se obtiene considerando como punto de partida que se conoce la magnitud del esfuerzo normal σ_n , el cual corresponde a la solución de la ecuación diferencial. Posteriormente, utilizando la técnica de iteración con la finalidad que la función $f(\sigma_n, \beta) = 0$, se obtiene β . A través del referido ángulo, junto con la tensión normal σ_n se halla la resistencia al corte τ_α , la cual se expresa a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi \right) \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2}$$

Igualmente, si se conoce β , y considerando que $f(\sigma_n, \beta) = 0$ se determina σ_n , y por tanto τ_α .

Cabe destacar, que esta representación analítica de la curva de resistencia intrínseca ayudará sin lugar a dudas a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a la estabilidad de taludes y estructuras subterráneas, en el diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, en la estimación de la resistencia por el fuste en roca de calidad pobre siendo el tipo de

fundación por medio de pilotes, así como la carga de hundimiento de una fundación en terrenos diaclasados, y en otras innumerables aplicaciones dentro del campo de la geotecnia.

También, debe señalarse que excelentes resultados se han obtenido empleando este nuevo criterio de rotura al determinar la resistencia al corte del hormigón en función de los parámetros k_1 y k_2 a través de pruebas de laboratorio en probetas sometidas a tracción, compresión simple y triaxial. Esta última prueba corresponde a la condición en la cual la tensión $\sigma_2 = \sigma_3$.

Mediante ejemplos prácticos se demuestran las ventajas y buenos resultados del método desarrollado.

Adicionalmente, es importante señalar que en los últimos años se ha realizado una extensa investigación en el campo de la ingeniería geotécnica con el objeto de poder determinar con mayor precisión la resistencia al corte de la roca tanto en la condición sana como fracturada.

Todo esto ha generado como resultado la publicación de una gran cantidad de estudios para definir un criterio tanto del punto de vista teórico como experimental que permita predecir la rotura del macizo rocoso, desde que en 1773 Coulomb postulara la primera hipótesis de falla.

La causa fundamental de que ninguno de los criterios existentes haya tenido una utilización universal radica en el hecho de que son muchos los parámetros que gobiernan el proceso de rotura de la roca, factores estos que dependen tanto del propio macizo rocoso como del estado tensional.

Básicamente estos criterios son modelos matemáticos que tratan de interpretar o definir en qué momento se inicia la rotura de un punto del material investigado a través del estado de esfuerzos y/ o deformaciones.

En los criterios de rotura se utilizan funciones analíticas sencillas que representen lo mejor posible el comportamiento general de los datos experimentales ajustando la curva a través de uno o varios parámetros.

Por supuesto, no hay un modelo único que se ajuste perfectamente a todos los materiales, y no existe ningún criterio de rotura preciso para todo estado tensional.

También debe señalarse, que en las últimas décadas se han desarrollado diferentes criterios empíricos como el aquí presentado, los cuales aunque no

poseen el esperado fundamento científico, ofrecen la gran ventaja de acercarse a la realidad del fenómeno físico.

Por otra parte, el otro gran reto en esta investigación se basa en llevar a cabo un procedimiento analítico sencillo que permita obtener la resistencia de la roca en la condición fracturada y meteorizada; tarea esta nada fácil por lo complejo del problema. Sin embargo, a pesar de los tropiezos encontrados, se ha logrado hallar la envolvente de rotura teniendo en cuenta la calidad de la roca.

Mediante el procedimiento que se describe en esta investigación (Procedimiento del Foco) los parámetros k_1 y k_2 se determinan con un buen grado de aproximación utilizando únicamente la relación $\xi=(\sigma_t/\sigma_c)$, tanto en la condición de roca intacta como en función de su índice de calidad. Todo esto con la ventaja adicional que no se requiere conocer el intervalo de las tensiones principales de rotura (σ_3, σ_1) a través de los ensayos experimentales.

Como se sabe, para llevar a cabo el ajuste de la curva por mínimos cuadrados y determinar las referidas constantes, es imprescindible o necesario utilizar como datos los respectivos valores de la tensión principal σ_1 que se han obtenido para cada presión de confinamiento en las pruebas triaxiales ($\sigma_2=\sigma_3$).

Con la ayuda de ejemplos prácticos se comparan los resultados con el criterio empírico de rotura de Hoek y Brown [1] aplicando diversos valores de la clasificación geomecánica de Bieniawski [2], conocida como *Rock Masses Rating* (RMR).

Adicionalmente, otro aspecto a señalar son las importantes contribuciones realizadas por Bieniawski [2] Barton [3], Hoek y Brown [1], Ramamurthy [4], Palmström [5] entre otros destacados investigadores, al avanzar con paso firme y aproximarse a resultados más reales de la resistencia de la roca en función del grado y las características de la fracturación, tamaño de los bloques, abertura, relleno y alteración de las discontinuidades.

Otra valiosa contribución, ha sido la de Yu [6] a través de su excelente libro "*Unified Strength Theory and Its Applications*", el cual se recomienda su lectura junto con el de los siguientes autores: Sheorey [7], "*Empirical Rock Failure Criteria*", Andreev [8], "*Brittle Failure of Rocks Materials*", y Mogi [9], "*Experimental Rock Mechanics*".

También cabe señalar, que se ha logrado el objetivo final de este apasionante tema concerniente con la resistencia de macizos rocosos, el cual ha permitido desarrollar un criterio práctico y efectivo de rotura considerando un estado poliaxial de tensiones; por cuanto hay evidencias que demuestran que el esfuerzo principal intermedio σ_2 tiene influencia en la resistencia de la roca. A la vez, el criterio empírico propuesto se compara con las pruebas experimentales de Mogi [9], junto con otros criterios existentes como son los de Zhang y Yu entre otros.

Este importante tema de la mecánica de las rocas, ha sido estudiado por muchos investigadores en especial por Mogi [9] quien comenzó sus estudios experimentales a partir de 1964, ampliando las condiciones de rotura para un estado poliaxial de esfuerzos $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Sin lugar a dudas lo previamente indicado tiene una relevante importancia por cuanto permite determinar con mayor exactitud la resistencia de la masa rocosa.

Por mencionar únicamente dos casos, es fundamental mejorar o perfeccionar el diseño del sostenimiento de túneles teniendo siempre como norte construir una obra más segura, y que permita también reducir costos sin detrimento de la estructura subterránea excavada.

Igualmente, es de interés analizar a través de un criterio de rotura tridimensional la estabilidad de hoyos en la industria petrolera, a sabiendas que no es fácil determinar el campo de esfuerzos "in situ" en la roca.

Adicionalmente, es fundamental conocer la magnitud, dirección e historia previa de las tensiones y por tanto, poder aplicar el criterio de rotura propuesto. En estas circunstancias, el primer paso para obtener la nueva expresión analítica, se fundamenta en adicionar al criterio de rotura bidimensional el incremento de la resistencia $\Delta\sigma_1$ debida a la tensión principal intermedia σ_2 .

I.2. DESARROLLO MATEMÁTICO DE LAS ECUACIONES QUE PERMITEN DETERMINAR LA ENVOLVENTE DE ROTURA O CURVA DE RESISTENCIA INTRÍNSECA¹.

Utilizando las ecuaciones de equilibrio en un estado bidimensional y mediante la figura (1) se sabe que:

$$\left. \begin{aligned} &\left[\sigma_{\alpha} - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ &\text{Que equivale a escribir,} \\ &f(\sigma_{\alpha}, \sigma_1, \sigma_3, \tau_{\alpha}) = \left[\sigma_{\alpha} - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_{\alpha}^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_1 = \eta(\sigma_3)$, la ecuación (1) toma la forma:

$$f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0 \quad (2)$$

Donde, $\sigma_{\alpha} = \sigma_n$ y τ_{α} representan el esfuerzo normal y tangencial actuando sobre el plano de rotura respectivamente.

Por otra parte, si la familia de líneas planas $f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0$, admite envolvente, las funciones $\sigma_{\alpha} = \sigma_n = \theta(\sigma_3)$ y $\tau_{\alpha} = \varphi(\sigma_3)$ que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} &f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹Considerando la relevancia del tema, en el Apéndice A se describe el procedimiento matemático para determinar la envolvente de una familia de curvas.

Despejando en (3) las tensiones, $\sigma_\alpha = \sigma_n$ y τ_α en función de σ_3 , se obtienen las ecuaciones paramétricas que definen la envolvente.

Asimismo, en caso que sea posible, se puede proceder eliminando la tensión σ_3 en las dos ecuaciones indicadas en (3), hallándose por lo tanto, una relación de la forma $\Omega(\sigma_\alpha, \tau_\alpha) = 0$, la cual representa también la envolvente. Este es el caso cuando la relación entre los esfuerzos principales es lineal, y por ende la curva de resistencia intrínseca es una recta.

Cabe destacar, que la familia de circunferencias de radio variable σ_3 , representada a través de (1) recibe el nombre de involutas.

Considerando (3) y tomando la derivada de σ_1 con respecto a σ_3 en ambos lados de la ecuación (1) queda:

$$2 \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \right] = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = 0 \quad (5)$$

Al simplificar la ecuación anterior el valor de la tensión normal $\sigma_\alpha = \sigma_n$ toma la forma:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (1) y despejando τ_α , se obtiene:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} \sqrt{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}} \quad (7)$$

Al dividir (7) entre (6), es posible escribir:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{(\sigma_{\alpha} - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \quad \therefore \quad \tau_{\alpha} = (\sigma_{\alpha} - \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \quad (8)$$

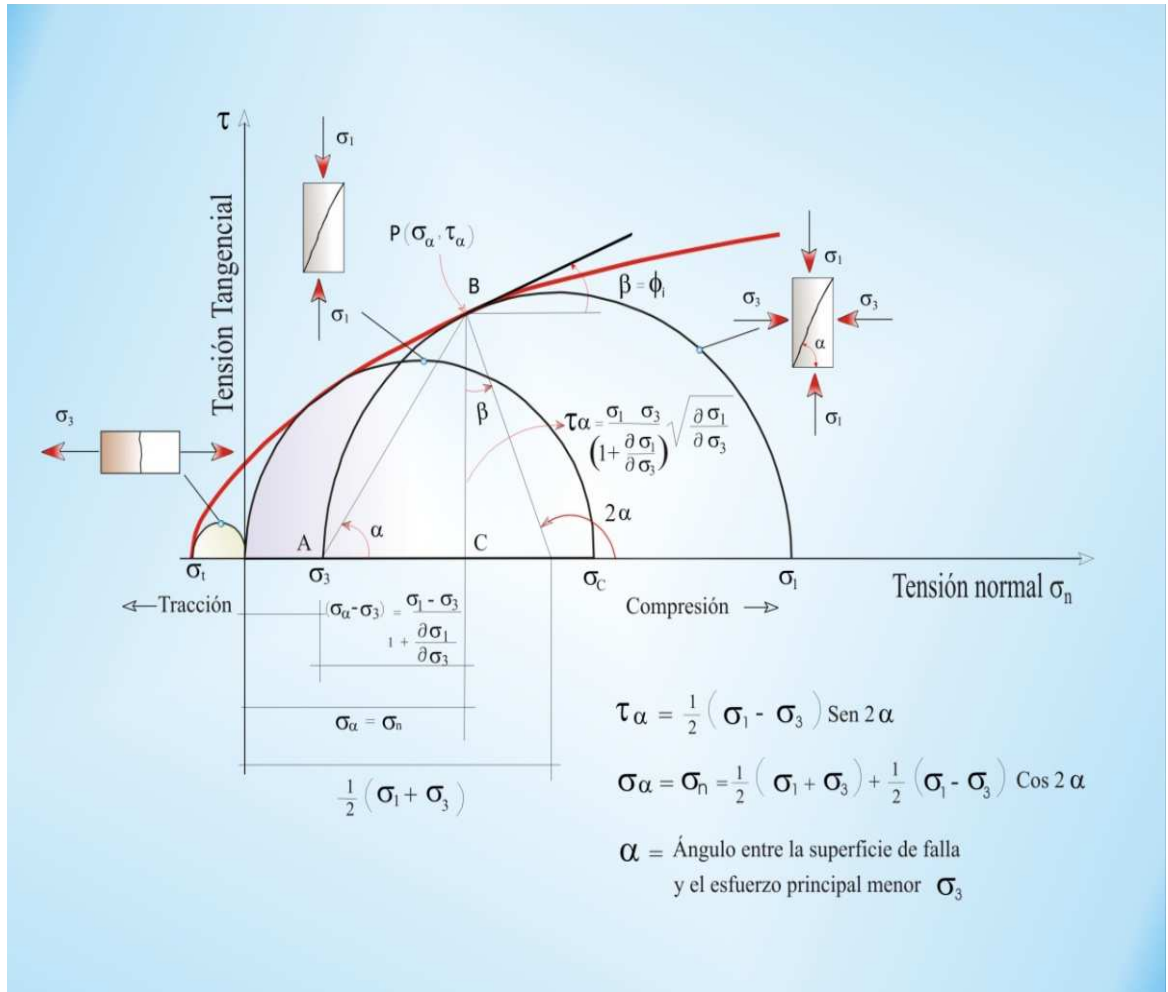


Figura 1. Envolvente de rotura por cizallamiento de la matriz rocosa en función de los esfuerzos principales.

Por otro lado, al observar el triángulo ABC de la Fig. 1, el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Igualmente, a través de la Fig. 1, la relación entre el ángulo que forma el plano de rotura α con el esfuerzo principal menor y el ángulo β en el punto de coordenadas $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, es la siguiente:

$$2\alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (10)$$

Es decir:

$$\tan \beta \cdot \tan 2\alpha = -1 \quad (11)$$

Cabe destacar, que β se conoce también como el ángulo de fricción interna instantáneo. A la vez utilizando (11), la pendiente de la envolvente puede determinarse como sigue:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \left(\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \right) \quad (12)$$

Al reemplazar (9) en (12), resulta:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) - 1}{2 \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)}} = \tau'_\alpha \quad (13)$$

Llamando² $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \sigma'_1$, queda por tanto:

² En este caso se observa que $\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$ no se refiere a la presión efectiva.

$$\tau'_{\alpha} = \frac{\sigma'_1 - 1}{2\sqrt{\sigma'_1}} \quad (14)$$

La cual se transforma:

$$\sigma'_1 - 2\tau'_{\alpha}\sqrt{\sigma'_1} - 1 = 0 \quad (15)$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau'_{\alpha} + \sqrt{1 + (\tau'_{\alpha})^2} \quad (16)$$

Despejando $\sigma_{\alpha} = \sigma_n$ en (5), se tiene:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1 + 1} \right] \quad (17)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_n = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3 \cdot \sigma'_1}{1 + \sigma'_1} \right) \quad (18)$$

Al despejar el esfuerzo principal menor σ_3 de la ecuación (7), se obtiene:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \left[\frac{\tau_{\alpha}(1 + \sigma'_1)}{\sqrt{\sigma'_1}} \right] \quad (19)$$

Reemplazando dicho valor en (18), queda:

$$\sigma_{\alpha}(1 + \sigma'_1) = \sigma_1 + \sigma'_1 \left[\sigma_1 - \frac{\tau_{\alpha}(1 + \sigma'_1)}{\sqrt{\sigma'_1}} \right] \quad (20)$$

A través de la ecuación anterior la tensión principal σ_1 es:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \sqrt{\sigma'_1} \quad (21)$$

Sustituyendo (16) en (21), resulta:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \left[\tau'_\alpha + \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \right] \quad (22)$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (23)$$

Igualmente, el esfuerzo principal menor σ_3 puede expresarse:

$$\sigma_3 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (24)$$

Siendo la diferencia entre los esfuerzos principales:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (25)$$

Elevando la ecuación (16) al cuadrado:

$$\sigma'_1 = (\tau'_\alpha)^2 + 2 \tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} + \left[1 + (\tau'_\alpha)^2 \right] \quad (26)$$

Obteniéndose finalmente:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2 (\tau'_\alpha)^2 + 2 \tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (27)$$

I.3. NUEVO CRITERIO DE ROTURA PROPUESTO

Úcar [10] ha propuesto un criterio de rotura bidimensional, en el cual las tensiones principales σ_1 y σ_3 están relacionadas a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_1 = k_1(\sigma_3 - \sigma_t) + k(\sigma_3 - \sigma_t)^{1/2} \quad (28)$$

Siendo k y k_1 constantes del material a determinar y σ_t la resistencia a la tracción de la roca intacta o del hormigón.

En el caso del ensayo de compresión sin confinar, se sabe que $\sigma_3 = 0$ y por lo tanto $\sigma_1 = \sigma_c$, transformándose la ecuación (28) como sigue:

$$\sigma_c = k_1(-\sigma_t) + k(-\sigma_t)^{1/2} \quad (29)$$

Cabe destacar que se ha convenido en asignarles a las tensiones normales el signo positivo si son de compresión y negativo si se trata de tracción.

Al despejar el valor de k_1 en (29), se obtiene:

$$k_1 = \left(\frac{k(-\sigma_t)^{1/2} - \sigma_c}{\sigma_t} \right) \quad (30)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación (28) por σ_c resulta:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_t}{\sigma_c} \right) + \frac{k}{\sqrt{\sigma_c}} \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_t}{\sigma_c} \right)^{1/2} \quad (31)$$

Como previamente se ha mencionado,

$$\xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \quad (32)$$

Si, además, se tiene en cuenta que:

$$k_2 = \frac{k}{\sqrt{\sigma_c}} \quad (33)$$

La ecuación (31) se transforma en:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} \quad (34)$$

Al aplicar nuevamente el caso del ensayo de compresión simple, es decir la tensión $\sigma_3 = 0$, se obtiene para la matriz rocosa que $\sigma_1 = \sigma_c$

Por lo tanto, la ecuación (34) se reduce a la expresión:

$$1 = k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2} \quad (35)$$

Finalmente, para simplificar cálculos posteriores es conveniente expresar la ecuación (34) en la forma siguiente:

$$\bar{\sigma}_1 = k_1 (\bar{\sigma}_3 - \xi) + k_2 (\bar{\sigma}_3 - \xi)^{1/2} \quad (36)$$

Siendo,

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \quad y \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \quad (37)$$

Cabe destacar que en la sección (2.2) se determinan los parámetros k_1 y k_2 junto con la constante de integración k_4 , teniendo en cuenta la calidad del macizo rocoso aplicando el índice de calidad RMR de Bieniawski.

I.4. DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE ROTURA

Primeramente, es necesario determinar la pendiente de la curva que relaciona las tensiones principales σ_1 y σ_3 .

Así, al derivar la ecuación (36) el valor de la pendiente $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right)$ es:

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right) = k_1 + \left(\frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}}\right) \quad (38)$$

Utilizando (27) y considerando que:

$$\tau'_\alpha = \left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right) = \tan \beta \quad (39)$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = 1 + 2 \cdot \tan^2 \beta + 2 \cdot \tan \beta \cdot \sec \beta \quad (40)$$

Mediante transformaciones trigonométricas (40) se reduce finalmente en la expresión siguiente:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{1 + \sen \beta}{1 - \sen \beta}\right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) \quad (41)$$

Igualando (38) y (41), se obtiene:

$$\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = k_1 + \left(\frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}}\right) = \tan^2 \alpha \quad (42)$$

Al despejar $(\bar{\sigma}_3 - \xi)$ resulta:

$$(\bar{\sigma}_3 - \xi) = \frac{\frac{1}{4}k_2^2}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1 \right]^2} = \frac{k_3}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1 \right]^2} \quad (43)$$

Siendo,

$$k_3 = \left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \quad (44)$$

Por otra parte, la ecuación (8) expresada adimensionalmente toma la forma:

$$\bar{\tau}_\alpha = (\bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_3) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)^{1/2} \quad (45)$$

Al igual que lo indicado a través de (37), todas las tensiones o esfuerzos se han expresado en forma adimensional al dividirse por la resistencia a compresión simple de la roca intacta σ_c .

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) \quad y \quad \bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) \quad (46)$$

Por simplicidad, la ecuación (45) se expresa en términos de (x, y) , transformándose:

$$y = (x - \bar{\sigma}_3) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)^{1/2} \quad (47)$$

Es decir:

$$\bar{\tau}_\alpha = y, \quad \bar{\sigma}_n = x \quad (48)$$

A través de (41) se sabe que: $\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right)^{1/2} = \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)$, por lo tanto,

$$y = (x - \bar{\sigma}_3) \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) \quad (49)$$

La cual puede expresarse también,

$$y \cdot \tan\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = (x - \bar{\sigma}_3) \quad (50)$$

Al despejar $\bar{\sigma}_3$ resulta,

$$\bar{\sigma}_3 = x - y \cdot \tan\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \quad (51)$$

Que equivale a escribir,

$$(\bar{\sigma}_3 - \xi) = (x - \xi) - y \cdot \tan\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \quad (52)$$

Remplazando el valor de $(\bar{\sigma}_3 - \xi)$ indicado a través de la ecuación (43) en (52), se obtiene que:

$$\frac{k_3}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^2} = (x - \xi) - y \cdot \tan\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \quad (53)$$

Al despejar $y = (\tau_\alpha / \sigma_c) = \bar{\tau} \alpha$ queda:

$$y = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = (x - \xi) \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{k_3 \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^2} \quad (54)$$

Finalmente, llamando a $X = (x - \xi) = (\sigma_n / \sigma_c - \xi)$ y reemplazando el valor de $k_3 = (k_2/2)$, la ecuación anterior se transforma:

$$y = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = X \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2} \quad (55)$$

Por otra parte, al derivar la ecuación anterior se obtiene la pendiente de la envolvente de rotura, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta = \left(\frac{dy}{dX} \right) &= \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) + X \frac{\sec^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}{2} \left(\frac{d\beta}{dX} \right) \\ &- k_3 \left\{ \frac{f_1(\beta) - f_2(\beta)}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^4} \right\} \left(\frac{d\beta}{dX} \right) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Siendo las funciones,

$$f_1(\beta) = \frac{1}{2} \sec^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2 \quad (57)$$

$$f_2(\beta) = \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \left\{ 2 \left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right] \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \sec^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \right\} \quad (58)$$

Luego de realizar simplificaciones se obtiene:

$$2 \left[\tan \beta - \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \right] \cdot \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = X \left(\frac{d\beta}{dX} \right) + k_3 \cdot f_3(\beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{dX} \right) \quad (59)$$

$$f_3(\beta) = \left\{ \frac{3 \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) + k_1}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^3} \right\} \quad (60)$$

A través de transformaciones trigonométricas la ecuación (59) se reduce a la expresión siguiente:

$$-\tan \left(45^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = X \left(\frac{d\beta}{dX} \right) + k_3 \left\{ \frac{3 \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) + k_1}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^3} \right\} \left(\frac{d\beta}{dX} \right) \quad (61)$$

Al expresar esta última ecuación en términos de $\left(\frac{dX}{d\beta} \right)$ queda:

$$\left(\frac{dX}{d\beta} \right) + X \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) + k_3 \left[\frac{3 \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) + k_1}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^3} \right] \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = 0 \quad (62)$$

El próximo paso es resolver la ecuación diferencial de primer orden, la cual es lineal al ser de primer grado en la variable dependiente y su derivada.

En forma compacta toma la forma,

$$\left(\frac{dX}{d\beta} \right) + P(\beta) \cdot X + Q(\beta) = 0 \quad (63)$$

Teniendo en cuenta (62) y (63) se observa que:

$$\left. \begin{aligned} P(\beta) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}\right) \\ Q(\beta) &= k_3 \left[\frac{3 \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + k_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^3} \right] \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden es:

$$X = e^{-\int P(\beta) d\beta} \left[k_4 - \int e^{\int P(\beta) d\beta} \cdot Q(\beta) d\beta \right] \quad (65)$$

Siendo k_4 una constante de integración a determinarse posteriormente en función de las condiciones de borde. Aplicando (65) se obtiene,

$$X = e^{-\int \left(\frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}\right) d\beta} \left\{ k_4 - k_3 \int e^{\int \left(\frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}\right) d\beta} \left[\frac{3 \cdot \tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) + k_1}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^3} \right] \right\} \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) d\beta \quad (66)$$

$$X = (1 - \sin\beta) \left\{ k_4 - \int \frac{K_3}{(1 - \sin\beta)} \left[\frac{3 \cdot \tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) + k_1}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^3} \right] \right\} \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) d\beta \quad (67)$$

Al considerar que, $\tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos\beta}{(1 - \sin\beta)}$ y $\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta}\right)$ la solución de la integral se simplifica, obteniéndose:

$$X = (1 - \operatorname{sen} \beta) \left\{ k_4 + \frac{k_3}{(1+k_1)^2} \left[\frac{4k_1}{[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen} \beta]^2} + \frac{(3-k_1)}{[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen} \beta]} \right] \right\} \quad (68)$$

Conociendo que $X = (X - \xi) = (\sigma_n / \sigma_c - \xi)$ y $k_3 = (k_2/2)^2$, resulta finalmente:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi \right) = (1 - \operatorname{sen} \beta) \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1)[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen} \beta]}{[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen} \beta]^2} \right] \right\} \quad (69)$$

Con las ecuaciones (54) y (69) se tiene el par de ecuaciones requeridas representadas paramétricamente a través del ángulo β que forma la tangente a la envolvente de falla, conocida también como curva de resistencia intrínseca.

Igualmente, se observa que tanto el esfuerzo cortante resistente τ_α como el normal σ_n se han identificado previamente a través de las expresiones indicadas en (46) y (48), es decir $y = (\tau_\alpha / \sigma_c)$, $x = (\sigma_n / \sigma_c)$.

Por lo tanto, si se conoce la tensión normal σ_n a través de la ecuación (69) se determina β y posteriormente τ_α empleando (54).

1.5. CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN k_4 - UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para efectos prácticos se ha considerado el siguiente ejemplo.

Parámetros resistentes de la roca intacta obtenidos a través de los ensayos de compresión sin confinar y de tracción:

$$\sigma_c = 32,00 \text{ MPa y } \sigma_t = -2,00 \text{ MPa; } \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) = -\frac{1}{16}$$

Teniendo en cuenta además los valores de las pruebas de compresión triaxial y aplicando la técnica de mínimos cuadrados se han determinado las constantes $k_1 = 0,787$ y $k_2 = 3,80$.

Al aplicar (34) se tiene la siguiente relación entre los esfuerzos principales:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= 0,787 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{16} \right) + 3,8 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{16} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

Por otra parte, cuando $\sigma_3=0$ (ensayo de compresión sin confinar) $\sigma_1=\sigma_c$ debiéndose cumplir de acuerdo a (35) que:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2} \\ 1 &= 0,787 \left(\frac{1}{16} \right) + 3,80 \left(\frac{1}{16} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

A través de (38), la pendiente de la curva que relaciona σ_1 y σ_3 es,

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = k_1 + \frac{k_2}{2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) - \xi}} = 0,787 + \frac{3,80}{2 \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{16}}}.$$

Para facilitar los cálculos, se determinará primeramente la pendiente para el caso particular del ensayo de compresión simple, en el cual $\sigma_3=0$.

$$\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = 0,787 + \frac{3,80}{2 \sqrt{\frac{1}{16}}} = 8,387$$

Por otra parte, se sabe que el ángulo α que forma el plano de falla con el esfuerzo principal menor es:

$$\alpha = \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = 70,95^\circ$$

Siendo por lo tanto $\beta = 51,90^\circ$

Considerando la ecuación (6), y expresándola en forma adimensional se determina la relación (σ_n/σ_c) para la condición en la cual:

$$\sigma_3=0 \text{ y } \sigma_1=\sigma_c.$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) + \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} = \frac{1}{(1+8,387)} = 0,1065$$

Adicionalmente, el esfuerzo normal σ_n como una fracción de σ_c es:

$$\sigma_n = \frac{1}{9,39} \sigma_c = 3,41 \text{ MPa}$$

Igualmente, la tensión normal puede obtenerse a través de la conocida ecuación:

$$x = \bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \sin^2 \alpha = 1 \cdot \cos^2 70,95^\circ = 0,1065 \approx 1/10$$

Reemplazando dicho valor en (69) se determina la constante de integración k_4 .

$$\left(0,1065 + \frac{1}{16}\right) = (1 - \sin 51,90^\circ) \left\{ k_4 + 1,13 \left[\frac{3,148 + (3 - 0,787) [(1 - 0,787) + (1 + 0,787) \sin 51,90^\circ]}{[(1 - 0,787) + (1 + 0,787) \sin 51,90^\circ]^2} \right] \right\}$$

$$k_4 = -2,11$$

A través de (49), el esfuerzo cortante en el instante de la rotura para la condición en la cual $\bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) = 0$ es,

$$y = \bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(x - \bar{\sigma}_3 \right) \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{9,39} \tan 70,95^\circ = 0,308 \approx \frac{3}{10}$$

$$x = \bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 1/9,39 = 0,1065 \quad \therefore \sigma_c = 32 \text{ MPa}, \sigma_n = 3,41 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = 0,308 \cdot \sigma_c = 9,86 \text{ MPa}$$

Igual valor se obtiene empleando la ecuación,

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \text{sen } 2\alpha = 1 \cdot \text{sen } 141,190^\circ = 0,308$$

Resumiendo, a continuación se indican los valores obtenidos a través del ensayo de compresión sin confinar, $\sigma_3=0$, los cuales son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}, \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) &= (0,1065, 0,308) \\ \sigma_c &= 32,00 \text{ MPa} \Rightarrow (\sigma_n, \tau_\alpha) = (3,41, 9,86) \text{ MPa} \\ \alpha &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = 70,95^\circ, \beta = 51,90^\circ \end{aligned} \right\} \quad \text{Véase Fig. 1}$$

En definitiva, la envolvente de rotura indicada en (54) puede construirse partiendo de la ecuación (69) considerando inicialmente diferentes valores

de $\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)$, por ejemplo: $\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0, 0,05, 0,10, 0,20, 0,30, 0,40, 0,50, \dots$

Luego para cada valor de $x = (\sigma_n/\sigma_c)$ se determina el correspondiente ángulo β y seguidamente $y = (\tau_\alpha/\sigma_c)$, a través de la referida ecuación (54).

Por supuesto, gráficamente es más sencillo obtener la envolvente o curva de resistencia intrínseca construyendo los círculos de Mohr para diferentes conjuntos de tensiones σ_3 y σ_1 .

Continuando con el problema, se determinará un segundo punto de la envolvente considerando el caso particular que $(\sigma_3/\sigma_c) = 0,10$.

Por lo tanto, al aplicar la mencionada presión de confinamiento, la rotura ocurrirá cuando (σ_1/σ_c) alcance el siguiente valor.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= 0,787 \left(0,1 + \frac{1}{16} \right) + 3,8 \left(0,1 + \frac{1}{16} \right)^{1/2} = 1,66 \Rightarrow \sigma_1 = 53,12 \text{ MPa} \end{aligned} \right\}$$

La inclinación de la tangente a la envolvente de falla β y el ángulo que forma el plano de rotura α con el esfuerzo principal menor teniendo en cuenta que $(\sigma_3/\sigma_c) = 0,10$ y $(\sigma_1/\sigma_c) = 1,66$, son los siguientes:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\sigma_3 - \xi}} = 0,787 + \frac{3,8}{2\sqrt{0,10 + \frac{1}{16}}} = 5,50$$

$$\beta = 43,80^\circ \text{ y } \alpha = (45^\circ + \beta/2) = 66,90^\circ$$

Al utilizar la ecuación (69) y (54), el valor de (σ_n/σ_c) y (τ_α/σ_c) , es respectivamente:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} + \frac{1}{16} \right) = (1 - \sin 43,80^\circ) \left\{ -2,11 + 1,13 \left[\frac{3,148 + (2,213) \cdot (1,4498)}{\left[(1 - 0,787) + (1 + 0,787) \cdot \sin 43,80^\circ \right]^2} \right] \right\}$$

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0,34 \text{ y } \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = 0,563$$

Igual resultado se obtiene a través de la ecuación:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin^2 \alpha = 1,66 \cdot \cos^2 66,90^\circ + \frac{1}{10} \sin^2 66,90^\circ = 0,34$$

$$\sigma_n = 10,88 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = \left(0,34 - \frac{1}{10} \right) \tan 66,90^\circ$$

$$\tau_\alpha = 0,563 \cdot \sigma_c \approx 18,00 \text{ MPa}$$

Resumiendo, para $(\sigma_3/\sigma_c) = 1/10$ y $(\sigma_1/\sigma_c) = 1,66$ los valores son:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}, \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) &= (0,34, 0,563) \\ \sigma_c = 32,00 \text{ MPa} &\Rightarrow (\sigma_n, \tau_\alpha) = (10,88, 18,00) \text{ MPa} \\ \alpha = \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) &= 66,90^\circ, \quad \beta = 43,680^\circ \end{aligned} \right\}$$

Como se podrá apreciar en la próxima sección una de las ventajas del procedimiento analítico, es que permite obtener con un buen rango de aproximación las constantes requeridas que vinculan los esfuerzos principales a través de una ecuación de segundo grado.

Esto se logra conociendo únicamente la relación que existe entre la resistencia a la tracción y la resistencia a compresión sin confinar de la roca o del hormigón $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$ incorporando además las respectivas condiciones de borde.

Es decir, para determinar las referidas constantes k_1 y k_2 no se requiere tener como datos de entrada el conjunto de valores de las tensiones principales del ensayo triaxial σ_3 y σ_1 .

I.6. ESTUDIO DE LA CURVA QUE REPRESENTA LA RELACIÓN ENTRE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES σ_1 Y σ_3 EN EL INSTANTE DE LA ROTURA

Uno de los aspectos importantes realizados en esta investigación, ha sido determinar qué tipo de sección cónica representa la ecuación (34). Cabe señalar, que el desarrollo matemático se detalla en el apéndice (B).

Al aplicar los procedimientos algebraicos que permiten estudiar estas curvas cuadráticas, se ha determinado tal como se intuía que la referida ecuación representa a una parábola definida por la ecuación:

$$\left[\frac{k_1 \cdot \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) + \lambda}{\sqrt{1+k_1^2}} \right]^2 = \frac{k_2^2}{(1+k_1^2)^{3/2}} \left[\frac{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cdot k_1 - b}{\sqrt{1+k_1^2}} \right] \quad (70)$$

Sabiendo que: $\bar{x} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}$, $\bar{y} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$ el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\left. \begin{aligned} Y &= \left(\frac{k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda}{\sqrt{1+k_1^2}} \right) \\ X &= \left[\frac{(\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1) - b}{\sqrt{1+k_1^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Es importante destacar que la nomenclatura utilizada en esta sección es diferente a la indicada en la ecuación (48). Por otra parte, los parámetros λ y b tienen por expresiones:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 (2 \cdot \xi \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi)}{(1+k_1^2)} \right] \quad (72)$$

$$b = \left(\frac{\xi^2 \cdot k_1^2 + \xi \cdot k_2^2 - \lambda^2}{k_2^2} \right) (1 + k_1^2) \quad (73)$$

En estas condiciones, la forma ordinaria o canónica de la parábola está representada por la ecuación:

$$Y^2 = \left[\frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)^{3/2}} \right] X \quad (74)$$

Si p , es la abscisa del foco (F), se aprecia a través de (74) que:

$$\left[\frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)^{3/2}} \right] = 4p \quad (75)$$

Por lo tanto, el foco tiene coordenadas $F(p, 0)$. Adicionalmente la ecuación canónica de la parábola de vértice en el origen en el nuevo sistema de coordenadas está representada por:

$$Y^2 = 4p \cdot X \quad (76)$$

A través de la Fig. 2, se observa que la recta $CC' = 4p$ corresponde al Latus Rectum, es decir a la cuerda trazada por el foco y perpendicular al eje de la parábola.

Empleando (76) y considerando $X = p$, el valor de la ordenada es $Y = 2p$. En estas condiciones al utilizar (71) y teniendo en cuenta en la referida curva la rama superior AD, resulta:

$$\left. \begin{aligned} 2p &= \left(\frac{k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda}{-\sqrt{1+k_1^2}} \right) \\ p &= \left[\frac{(\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1) - b}{\sqrt{1+k_1^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

A través de (77) se obtienen las coordenadas del punto (C) perteneciente al extremo superior del Latus Rectum, resultando:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = \frac{0.25 \cdot k_2^2 (1 - 2k_1) + (1 + k_1^2)(b - \lambda \cdot k_1)}{(1 + k_1^2)} \\ \bar{y} &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \cdot \bar{x} + \lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

El vértice (V) de la parábola referido al sistema original (σ_3/σ_c , σ_1/σ_c), corresponde a las siguientes coordenadas:

$$\bar{x}_v = \left[\frac{b - \lambda \cdot k_1}{(1 + k_1^2)} \right], \quad \bar{y}_v = \lambda + k_1 \left[\frac{b - \lambda \cdot k_1}{(1 + k_1^2)} \right] \quad (79)$$

Por otra parte, el eje de la parábola de pendiente k_1 e intercepto λ queda definido por la ecuación:

$$\bar{y} = k_1 \bar{x} + \lambda \quad (80)$$

Siendo, $\bar{x} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}, \bar{y} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$

Para mayor detalle, véase la Fig. 2 y el Apéndice B. Debe señalarse que al considerar la resistencia a compresión simple o sin confinar en probetas de hormigón se debe reemplazar σ_c por f'_c .

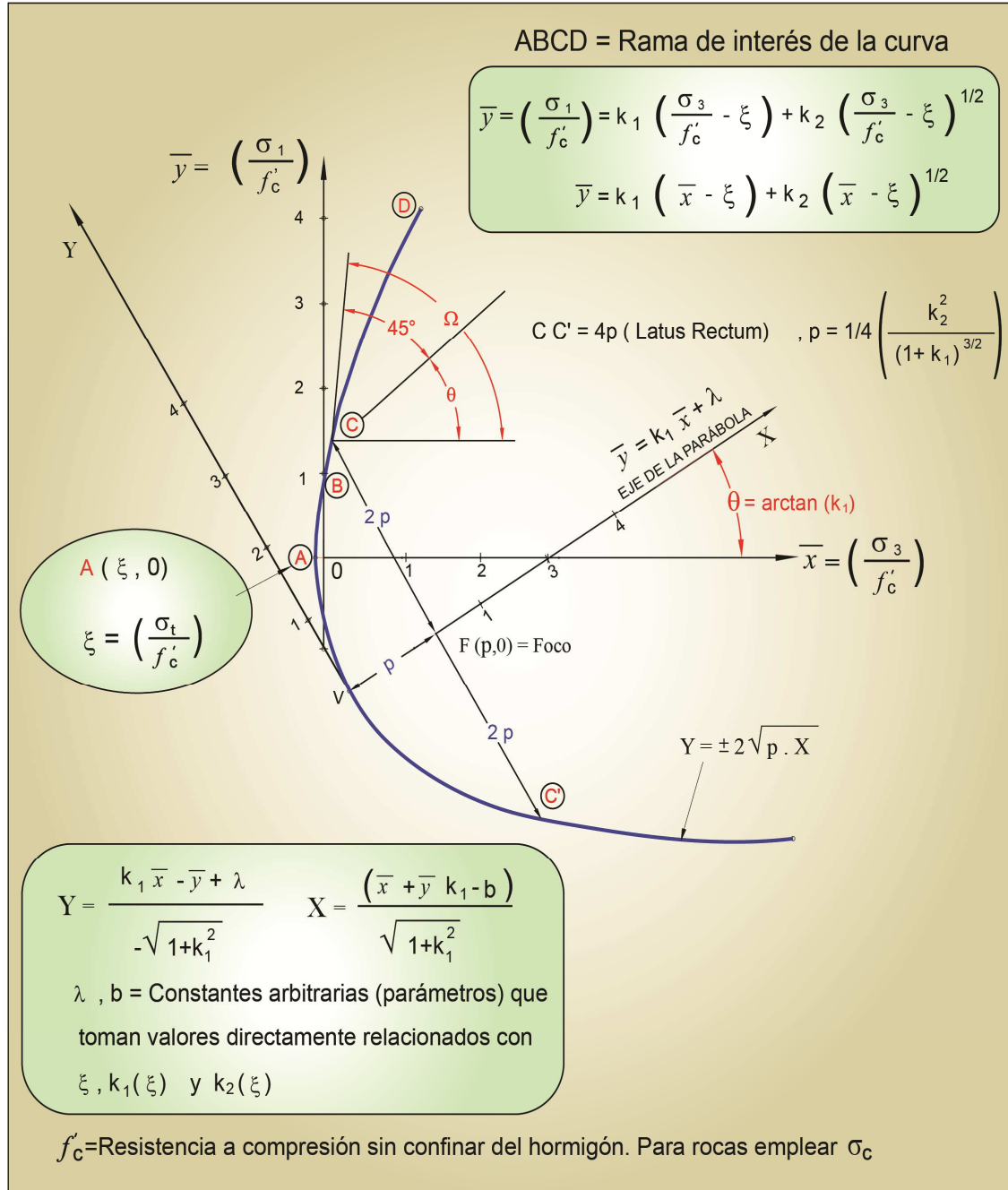


Figura 2. Parábola de rotura expresada en forma canónica en función de las tensiones principales

I.7. DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES QUE RELACIONAN LOS PARÁMETROS k_1 , k_2 Y k_4 (CONSTANTE DE INTEGRACIÓN) EN LA ROCA INTACTA Y EL HORMIGÓN

Como previamente se ha mencionado los valores de k_1 y k_2 indicados en la ecuación (34) pueden obtenerse con buena aproximación a través del parámetro $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$.

A continuación aplicando ciertas condiciones de borde se determinan un conjunto de ecuaciones que contienen a los parámetros k_1 y k_2 , los cuales gobiernan la relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 . Adicionalmente, el procedimiento que se describe ayuda a conocer para cada condición en particular el intervalo de tensiones y por ende permite tener un mejor conocimiento de la envolvente de rotura.

- 1) Para el caso particular del ensayo de compresión sin confinar se sabe que $\sigma_3 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_c$, debiéndose por lo tanto cumplir a través de la referida ecuación:

$$1 = k_1(-\xi) + k_2(-\xi)^{1/2} \quad (81)$$

- 2) La pendiente de la curva que relaciona $\sigma_1 = f(\sigma_3)$ de acuerdo a (38) es:

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right) = \tan^2 \alpha = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}} \quad (82)$$

Por otra parte, al emplear (6), expresada en forma adimensional resulta:

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_3 + \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)}{\left(1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)} \quad (83)$$

Siendo, además,

$$\bar{\sigma}_n = x = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right), \quad \bar{\sigma}_3 = \bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \text{ y } \bar{\sigma}_1 = \bar{y} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \quad (84)$$

Continuando con el ensayo de compresión simple, se conoce que, $\bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 1$ y $\bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0$. Por lo tanto, (83) se transforma:

$$\bar{\sigma}_n = \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)}{\left(1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)} \quad (85)$$

En estas condiciones, al reemplazar el valor de $\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)$ indicado en (82) en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\left[\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi}}{2\sqrt{-\xi} \cdot (1+k_1) + k_2} \quad (86)$$

3) Empleando nuevamente la condición: $\sigma_1 = \sigma_c \Rightarrow \left(\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 \right)$, $\sigma_3 = 0$. La tensión normal $\sigma_n = (\sigma_n)_{\sigma_3=0}$ en función del ángulo α , se obtiene como sigue:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin^2 \alpha = 1 \cdot \cos^2 \alpha \quad (87)$$

Sabiendo que $\alpha = (45^\circ + \beta/2)$, la ecuación anterior se transforma:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{1 - \sin \beta}{2} \right) \quad (88)$$

Para fines prácticos, se aplicará la notación $\beta=\beta_1$ cuando el esfuerzo principal menor $\sigma_3=0$ (ensayo de compresión simple o sin confinar)

$$\left(\bar{\sigma}_n\right)_{\sigma_3=0} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right)_{\sigma_3=0} = \left(\frac{1 - \text{sen}\beta_1}{2}\right) \quad (89)$$

Como previamente se ha mencionado la pendiente de la curva que relaciona $\sigma_1=f(\sigma_3)$, es de acuerdo a la ecuación (82):

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right) = \tan^2 \alpha = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{1 + \text{sen}\beta}{1 - \text{sen}\beta}\right) = k_1 + \frac{k_2}{2(\bar{\sigma}_3 - \xi)^{1/2}} \quad (90)$$

Al considerar que $\sigma_3=0 \rightarrow \beta=\beta_1$, la última ecuación se transforma:

$$\left(\frac{1 + \text{sen}\beta_1}{1 - \text{sen}\beta_1}\right) = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{-\xi}} \quad (91)$$

Al despejar $\text{sen}\beta_1$, se obtiene:

$$\left[\left(\text{sen}\beta_1\right)_{\sigma_3=0}\right] = \frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \quad (92)$$

β_1 (ángulo de inclinación de la recta tangente a la envolvente de rotura considerando que $\sigma_3=0$).

4) Condición de borde para el caso de resistencia a la tracción σ_t .

Este ensayo está representado como a continuación se indica:

$$\left(\bar{\sigma}_3 = \xi = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \rightarrow \sigma_3 = \sigma_t, \quad \sigma_1 = 0$$

Por otra parte, se observa que la referida condición de borde al ser aplicada en (34) los términos se anulan unos con otros.

Este inconveniente se resuelve teniendo en cuenta la ecuación (70) que representa la ecuación de la parábola en forma canónica.

De esta forma se obtiene la siguiente expresión:

$$(k_1 \cdot \xi + \lambda)^2 = \frac{k_2^2}{(1+k_1^2)}(\xi - b) \quad (93)$$

Al reemplazar el valor de b indicado en la ecuación (73), resulta:

$$(k_1 \cdot \xi + \lambda)^2 = \frac{k_2^2}{(1+k_1^2)} \left[\xi - \left(\frac{\xi^2 \cdot k_1^2 + \xi \cdot k_2^2 - \lambda^2}{k_2^2} \right) (1+k_1^2) \right] \quad (94)$$

Finalmente, substituyendo el parámetro λ definido a través de (72), la ecuación anterior se transforma:

$$\left\{ k_1 \cdot \xi - \overbrace{\left[\frac{k_1 (2 \cdot \xi \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi)}{2(1+k_1^2)} \right]}^{\lambda} \right\}^2 = \left\{ \xi \frac{k_2^2}{(1+k_1^2)} - \left[\xi^2 \cdot k_1^2 + \xi \cdot k_2^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{k_1 (2 \cdot \xi \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi)}{(1+k_1^2)} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (95)$$

En estas condiciones, se tienen dos ecuaciones representadas por (81) y (95), siendo las incógnitas k_1 y k_2 . Adicionalmente, al aplicar los métodos numéricos para sistemas de ecuaciones no lineales se observa que existen infinitas soluciones de k_1 y k_2 que satisfacen las ecuaciones no lineales previamente indicadas.

Como se explicará en la próxima sección, este problema se resuelve considerando que el *latus rectum* interseca el eje de las ordenadas en $(\sigma_1/\sigma_c)=1$, obteniéndose directamente los valores de k_1 y k_2

Como comentario final, si se aplica la condición de borde:

$$\left(\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 \right) \rightarrow \sigma_1 = \sigma_c, \sigma_3 = 0, \text{ la ecuación (70) se transforma:}$$

$$(\lambda - 1)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} (k_1 - b) \quad (96)$$

Cabe destacar que esta última ecuación es equivalente a la expresión (81), representada por $k_1(-\xi) + k_2(-\xi)^{1/2} = 1$, la cual se determinó a través de (34).

5) El próximo paso es emplear la ecuación (69) la cual relaciona (σ_n/σ_c) y el ángulo de fricción interna $\beta = \beta_i$. En estas condiciones es posible calcular la constante de integración k_4 para la condición en la cual $\bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} = 0$.

$$\left[\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} - \xi \right] = \left[1 - (\sin \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] \times \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4 \cdot k_1 + (3-k_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sin \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sin \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]^2} \right] \right\} \quad (97)$$

Al reemplazar $\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)_{\sigma_3=0}$ y $(\sin \beta_1)_{\sigma_3=0}$ resulta:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{2\sqrt{-\xi}}{2\sqrt{-\xi} \cdot (1+k_1) + k_2} \right) - \xi \right] = \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \right) \right] \\
& \times \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1) \cdot \left(\frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \right) \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1) \cdot \left(\frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \right) \right]^2} \right] \right\} \quad (98)
\end{aligned}$$

En definitiva, conociendo k_1 y k_2 , la constante de integración k_4 se obtiene a través de la ecuación (98).

Resumiendo, una vez conocidas k_1 y k_2 , es ventajoso con la ayuda de la hoja de cálculo EXCEL incorporar las siguientes ecuaciones definidas a través de las expresiones (72), (73), (86), (92) y (97).

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 (2 \cdot \xi \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi)}{(1 + k_1^2)} \right] \quad b = \left(\frac{\xi^2 \cdot k_1^2 + \xi \cdot k_2^2 - \lambda^2}{k_2^2} \right) (1 + k_1^2)$$

$$(k_1 \cdot \xi + \lambda)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} (\xi - b) = 0$$

$$\left[\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi}}{2\sqrt{-\xi} \cdot (1 + k_1) + k_2}$$

$$\left[\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} - \xi \right] = \left[1 - (\text{sen} \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]$$

$$\left[\left(\text{sen} \beta_1 \right)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2}$$

$$\times \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1 + k_1)} \right)^2 \left[\frac{4 \cdot k_1 + (3 - k_1) \left[(1 - k_1) + (1 + k_1) (\text{sen} \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]}{\left[(1 - k_1) + (1 + k_1) (\text{sen} \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]^2} \right] \right\}$$

Empleando esta última ecuación se determina la constante de integración k_4 .

Cabe destacar que los valores de λ y b permiten calcular el eje de la parábola y el vértice. Por otra parte, conociendo k_1 y k_2 junto con

$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)_{\sigma_3=0}$ y $(\text{sen} \beta)_{\sigma_3=0}$ se determina la constante de integración k_4

teniendo en cuenta la última ecuación indicada.

Como previamente se ha mencionado existen infinitas soluciones de k_1 y k_2 que definen la ecuación de la parábola, y por ende infinidad de valores de la

abscisa (p) del foco, la cual está representada por la ecuación

$$p = \frac{1}{4} \left[\frac{k_2^2}{(1+k_1^2)^{3/2}} \right].$$

Adicionalmente, se observa a través de la figura 2, que el punto (C) representa un caso muy particular de la parábola, por cuanto su ubicación se obtiene por la intersección del *latus rectum*³ con la rama superior de la curva parabólica; y por lo tanto depende directamente del valor de la abscisa $p=f(k_1, k_2)$ del foco.

Por otra parte, el inconveniente de obtener un sin número de valores de k_1 y k_2 se evita teniendo en cuenta que la correcta solución de las constantes se determina cuando esta cuerda (lado recto) trazada por el foco y perpendicular al eje de la parábola interseca el punto (B).

Siendo este último punto ubicado justamente en el eje de las ordenadas, tal como se puede observar en la figura 2.

Cabe destacar, que la escogencia del punto (B) se debe a que representa un estado de esfuerzos en el cual se obtiene la mínima resistencia, y por tanto corresponde a la condición de compresión

uniaxial, es decir: $\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0$.

También, es importante resaltar que a través de las diferentes pruebas de compresión triaxial tanto en roca intacta como en hormigón se determinaron las constantes k_1 y k_2 empleando la conocida técnica de mínimos cuadrados.

Una vez conocidos dichos parámetros que definen la curva plana, seguidamente se calcularon las coordenadas $\overline{\sigma_3} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)$ y $\overline{\sigma_1} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right)$ pertenecientes al punto de intersección entre el lado recto (*latus rectum*) y

³ En una parábola, la longitud del *latus rectum* es igual al valor absoluto de $4p$.

El valor de p (distancia focal) es la distancia entre el vértice al foco y del vértice a la directriz

la curva superior de parábola empleando las ecuaciones indicadas en (78). Considerando lo previamente señalado se pudo evaluar que las coordenadas calculadas empleando la referida técnica coincidían o se encontraban muy cerca del punto (B) ubicado en el eje de las ordenadas, el cual representa el denominado procedimiento del foco.

Por otra parte, al estudiar el caso particular de $k_1=1$, el latus rectum interseca el punto (A) de la parábola (ver figura 2). Dicho punto representa el límite inferior de la rama de interés de la curva y se encuentra ubicado en el eje negativo de las abscisas.

Es decir, las coordenadas del referido punto están definidas por:

$$\bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = \sigma_t = \xi(\text{valor negativo}), \text{ y } \bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 0.$$

Adicionalmente, para el caso que $k_1 > 1$, el punto de intersección del latus rectum o lado recto con la parábola se encuentra en la rama inferior de la parábola, lo cual indica que no es la correcta solución. Por lo tanto, valores de $k_1 \geq 1$ quedan descartados.

En conclusión, la solución buscada está definida para valores de $k_1 < 1$ pero sujeta a la condición en la cual la abscisa (p) perteneciente al nuevo sistema de ejes coordenados tenga por abscisa $\bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0$ en el sistema de coordenadas original o primitivo.

A través de lo previamente indicado, la ordenada del punto (B) representa la cota inferior para valores de: $\bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \geq 0$.

En otras palabras, el referido punto se determina cuando el latus rectum interseca el eje de las ordenadas. Es decir, debe cumplirse que:

$$\bar{y} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 1 \Rightarrow \bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0$$

Así, dichas constantes se obtienen para un estado de esfuerzos en el cual la tensión principal menor $\sigma_3=0$ (no hay confinamiento) y por ende la resistencia a compresión es mínima.

Al considerar lo previamente indicado, las siguientes expresiones se obtienen a través de (78):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}=0 &\Rightarrow \frac{1}{4} k_2^2 (1-2k_1) + (1+k_1^2)(b-\lambda \cdot k_1) = 0 \\ \bar{y}=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)=1 &\Rightarrow \lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2^2}{(1+k_1^2)} \right) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Igualmente, de acuerdo a la ecuación (75) la abscisa del foco está representada por la ecuación:

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{k_2^2}{(1+k_1^2)^{3/2}} \right)$$

I.8. DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES k_1 Y k_2 MEDIANTE UNA SIMPLE ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

De lo mencionado anteriormente se conoce que la correcta ubicación del foco de coordenadas $(X,Y) = (p,0)$ se obtiene cuando el latus rectum interseca el eje de las ordenadas en el punto (B) de la figura (2), el cual está representado por las coordenadas $(0,1)$, siendo:

$$\bar{x}=\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)=0, \bar{y}=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)=1 \quad (\text{Considerando los ejes coordenados primitivos})$$

Como se sabe la ecuación canónica de la parábola en el nuevo sistema de coordenadas (X, Y) está definida por:

$$Y^2 = 4p.X \Rightarrow Y = \pm 2(p X)^{1/2} \quad (100)$$

También a través de la Fig. (2) se observa que la pendiente en el punto C de coordenadas $(p, 2p)$ referido a los nuevos ejes coordenados es⁴:

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)_{X=p} = 2 \cdot \frac{p}{2\sqrt{pX}} = 1 \quad (101)$$

Es decir, el ángulo que forma la recta tangente en el punto (C) con el eje X es 45° . Adicionalmente el ángulo que forma la mencionada tangente con el eje $\bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)$ es igual a $\Omega = (45^\circ + \theta)$, siendo el valor de $\theta = \arctan(k_1)$.

Es decir, θ es el ángulo que forma el eje de la parábola con el eje horizontal $\bar{x}$, tal como se indica a través de la Fig. 2. Por lo tanto, lo que verdaderamente interesa es obtener la pendiente en un punto de la rama positiva de la curva (compresión) en la cual la abscisa (p) corresponda a $\bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) = 0$ en el sistema de coordenadas primitivo. Lo anterior indica que el punto de interés está representado por B (0,1).

En estas condiciones, como previamente se ha mencionado la pendiente de la curva que relaciona $\sigma_1 = f(\sigma_3)$, es de acuerdo a la ecuación (82):

$$\tan^2 \alpha = \tan \Omega = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right) = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}} \quad (102)$$

Al considerar $X = \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} = 0$, resulta:

⁴También la pendiente puede calcularse a través de la ecuación de la recta tangente a la curva parabólica en el punto $(X_1, Y_1) = (p, 2p)$, siendo: $Y = Y_1 + (2p / Y_1)(X - X_1)$, que equivale también a escribir $Y \cdot Y_1 = 2p \cdot (X + X_1)$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente en el citado punto es $Y = (X + p)$ y su pendiente es igual a uno

$$\tan \Omega = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)_{\bar{\sigma}_3=0} = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{-\xi}} \quad (103)$$

Por otra parte, a través de la Fig. 2 y considerando la tangente en el punto (B) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\tan \Omega = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)_{\bar{\sigma}_3=0} = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{-\xi}} = \tan \overbrace{\left(45^\circ + \arctan(k_1) \right)}^{(45^\circ + \theta)} \quad (104)$$


 $\theta = \arctan(k_1).$

Resultando,

$$k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{-\xi}} = \tan \left(45^\circ + \arctan(k_1) \right) = \left(\frac{1+k_1}{1-k_1} \right) \quad (105)$$

Para el caso del ensayo de compresión simple se sabe que:

$$\sigma_3 = 0, \bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0, \sigma_1 = \sigma_c, \bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 1$$

Debiéndose por lo tanto cumplir a través de la ecuación (34) que:

$$1 = k_1(-\xi) + k_2(-\xi)^{1/2} \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{[1 - k_1(-\xi)]}{\sqrt{-\xi}}} \quad (106)$$

Al reemplazar el valor de k_2 en (105), resulta:

$$|\xi| \cdot k_1^2 + k_1(1 + |\xi|) + (2|\xi| - 1) = 0 \quad (107)$$

Siendo el valor de k_1 ,

$$k_1 = \frac{-(1+|\xi|) + \sqrt{1+6|\xi|-7\xi^2}}{2|\xi|} \quad (108)$$

Obteniéndose finalmente⁵,

$$k_1 = \frac{-(1+|\xi|) + \sqrt{(1+7|\xi|)(1-|\xi|)}}{2|\xi|} \quad (109)$$

Adicionalmente, cabe indicar que a través de las ecuaciones (106) y (109), se simplifican los cálculos para determinar los valores de las constantes k_1 y k_2 sin necesidad de aplicar métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones no lineales, o utilizando las aplicaciones de EXCEL junto con el programa Solver.

En definitiva, los referidos parámetros se obtienen mediante una sencilla ecuación de segundo grado.

La razón fundamental de reducir los procedimientos matemáticos es el resultado de transformar la ecuación de la parábola a la forma ordinaria o canónica a través del nuevo sistema de coordenadas (X, Y).

Como se ha mencionado hay innumerables valores de (p) que dependen de los parámetros k_1 (ξ) y k_2 (ξ). Por lo tanto, lo que se desea es determinar la correcta ubicación de la abscisa del foco, la cual se obtiene cuando el latús rectum interseca el punto (B), cuya abscisa está definida por:

$$\overline{\sigma}_3 = \overline{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0$$

En definitiva, el punto buscado es:

$$B(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 1) \quad \longrightarrow \quad \text{Referido al sistema primitivo de coordenadas}$$

⁵Esta metodología de cálculo para determinar las constantes k_1 y k_2 aparece publicado por el autor de la presente obra en el Primer Seminario Internacional de Túneles y Obras Subterráneas, celebrado en Ecuador en septiembre de 2013

$$\bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right), \bar{y} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right)$$

$B(X, Y) = (p, 2p) \rightarrow$ Referido al nuevo sistema de ejes coordenados.

I.9. CÁLCULO DE LAS CONSTANTES - EJEMPLO COMPARATIVO

A través de las ecuaciones (109) y (106) se determinan las constantes k_1 y k_2 que vinculan los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 aplicando el criterio de rotura propuesto por Úcar [10]. Nuevamente, es de hacer notar, que estas ecuaciones corresponden a las coordenadas del punto de intersección en el extremo superior del lado recto (Latus Rectum) con la parábola, pero considerando como condición que:

$$\bar{\sigma}_3 = \bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0, \text{ y } \bar{\sigma}_1 = \bar{y} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 1$$

Este método de cálculo tiene la ventaja que k_1 y k_2 se determinan considerando únicamente la relación entre la resistencia a la tracción σ_t y a compresión sin confinar σ_c , es decir, a través del previamente indicado parámetro $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$.

La tabla anexa muestra los valores de σ_1 obtenidos por Torres [11] en función de los parámetros k_1 y k_2 aplicando la técnica de los mínimos cuadrados, y se comparan con el procedimiento del foco. La investigación de Torres [11] en su tesis de grado se fundamentó en determinar la resistencia del hormigón a través de los ensayos de compresión simple, tracción y pruebas triaxiales empleando el criterio de rotura propuesto por Úcar [10], cuyo trabajo aparece en la 14ª Conferencia Panamericana de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica celebrada en Canadá en el año 2011.

Adicionalmente, Torres [11] ensayó 350 probetas de hormigón, 55 de ellas correspondientes a las pruebas triaxiales ($\sigma_2 = \sigma_3$), en muestras cilíndricas de 5 cm de diámetro y 10 cm de altura, las restantes probetas se fabricaron variando la relación ancho/altura y tamaño. También, llevó a cabo pruebas

de resistencia a compresión simple en probetas tomadas como referencia en cilindros con relación altura/ancho de 2:1, de diámetro $\phi = 15$ cm y altura $H = 30$ cm. La resistencia media de los treinta cilindros ensayados resultó ser de $f'_c = 26,88$ MPa, con una desviación estándar $\sigma_{f'_c} = 0,96$ MPa

SOLUCIÓN MEDIANTE EL PROCEDIMIENTO DEL FOCO

Datos Iniciales

$$\sigma_t = -3,50 \text{ MPa}, \sigma_c = 33,00 \text{ MPa}, \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) = -0,106$$

A través de las ecuaciones (109) y (106), resulta:

$$k_1 = \frac{-(1+|\xi|) + \sqrt{(1+7|\xi|)(1-|\xi|)}}{2|\xi|} = 0,6697$$

$$k_2 = \frac{[1 - k_1(-\xi)]}{(-\xi)^{1/2}} = 2,853$$

Al aplicar (86), la tensión normal (adimensional) teniendo en cuenta que el esfuerzo principal menor $\sigma_3 = 0$, es:

$$\bar{\sigma}_n = \frac{2\sqrt{-\xi}}{2\sqrt{-\xi} \cdot (1+k_1) + k_2}, \quad \bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0,1652$$

Por otra parte, a través de (92) se obtiene el ángulo β_1 que forma la tangente a la envolvente de rotura considerando que la tensión principal menor $\sigma_3 = 0$.

$$\text{sen} \beta_1 = \left(\frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \right) \Rightarrow \beta_1 = 42,03^\circ$$

Finalmente, empleando (97) y (72)

$$\left[\left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} - \xi \right] = \left[1 - \left(\text{sen} \beta_1 \right)_{\sigma_3=0} \right] \\ \times \left\{ k_4 + \left(\frac{K_2}{2(1+K_1)} \right)^2 \left[\frac{4 \cdot k_1 + (3-K_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1) \left(\text{sen} \beta_1 \right)_{\sigma_3=0} \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1) \left(\text{sen} \beta_1 \right)_{\sigma_3=0} \right]^2} \right] \right\}$$

$k_4 = -1,287$ (constante de integración)

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 (2 \cdot \xi \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi)}{(1+k_1^2)} \right] = -1,811$$

SOLUCIÓN AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS-TORRES [11]

$$k_1 = 0,712$$

$$k_2 = 2,839$$

$$\beta_1 = 42,11^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0,1677 \end{aligned} \right\} \text{ (Ambos valores cuando } \sigma_3=0 \text{)}$$

$$k_4 = -1,223 \text{ (Constante de integración)}$$

$$\lambda = -1,828 \text{ (Lambda-intercepto del eje de la parábola)}$$

Tabla 1. Aplicación del Criterio de Rotura de Úcar [10]. Comparación de los resultados de resistencia del hormigón a través de las pruebas triaxiales con el procedimiento del foco y la técnica de mínimos cuadrados.

Valores de Resistencia del Hormigón según Torres [11]					Valores en MPa	
					Mínimos Cuadrados	Procedimiento del Foco
	MPa	MPa	Valores adimensionales			
$f'c$ (MPa)	σ_3	σ_1	$\sigma_3 / f'c$	$\sigma_1 / f'c$	$(\sigma_1)_{MC}$	$(\sigma_1)_{Foco}$
33,00	-3,50	0,00	-0,106	0	0	0
	0,00	33,00	0,000	1,000	33,00	33,00
σ_t (MPa)	2,80	46,69	0,085	1,415	45,42	45,38
-3,50	3,85	53,90	0,117	1,633	49,45	49,37
	5,59	57,89	0,169	1,754	55,64	55,52
ξ	6,99	63,66	0,212	1,929	60,29	60,12
-0,106	8,39	65,30	0,254	1,979	64,70	64,49
Constantes Ajuste Mínimo Cuadrados	9,79	69,67	0,297	2,111	68,92	68,67
	11,19	74,61	0,339	2,261	72,98	72,67
	13,99	79,45	0,423	2,408	80,66	80,28
K_1	15,39	85,82	0,466	2,600	84,33	83,90
0,712	16,78	86,36	0,508	2,617	87,88	87,41
K_2	17,48	87,09	0,529	2,639	89,64	89,14
2,839	18,18	89,13	0,551	2,701	91,37	90,85
	19,58	97,17	0,593	2,945	94,78	94,22
Constantes Procedimiento Del Foco	20,98	98,29	0,636	2,978	98,12	97,51
	22,38	100,84	0,678	3,056	101,39	100,73
K_1	23,78	103,05	0,721	3,122	104,61	103,90
0,6695	25,18	108,89	0,763	3,300	107,76	107,00
K_2	26,57	110,77	0,805	3,357	110,84	110,04
2,854	27,97	113,57	0,848	3,441	113,90	113,04

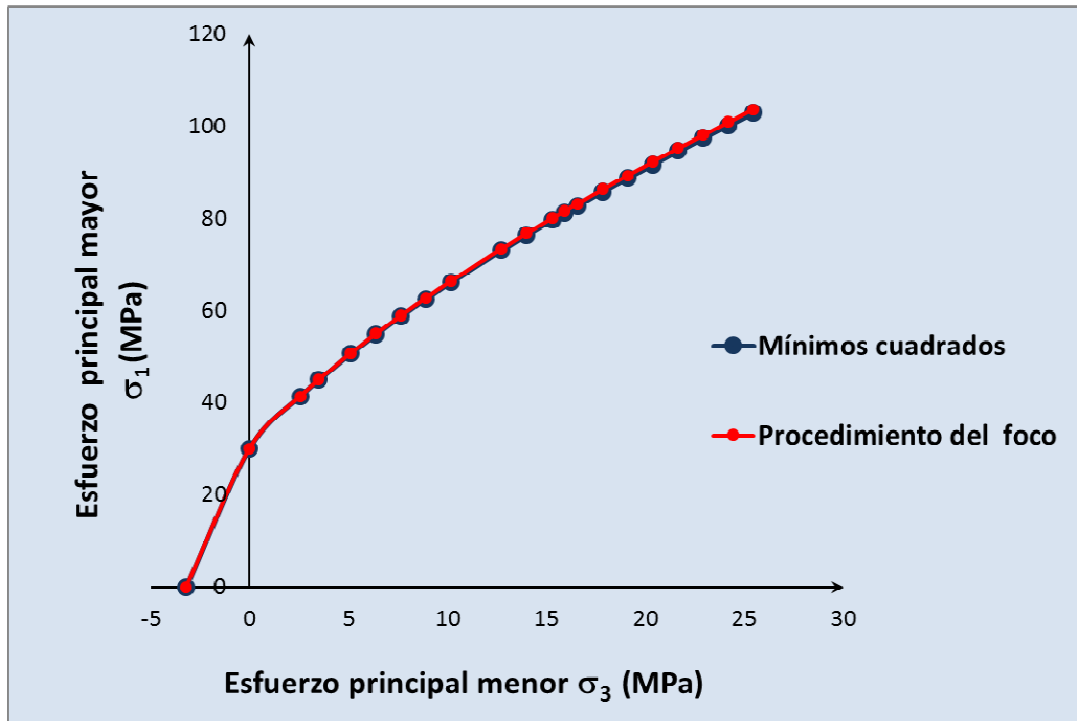


Figura 3. Valores de σ_1 a través de la técnica de mínimos cuadrados y el procedimiento del foco aplicando el criterio de Úcar.

En la referida tabla se comparan los resultados de la tensión principal mayor obtenidos de las pruebas de resistencia con los valores de σ_1 aplicando el criterio propuesto en esta investigación, empleando tanto el procedimiento del foco como la técnica de ajuste por mínimos cuadrados. En este último método en mencionar se ha obtenido un error estándar $Se=1,90$, mientras que en el procedimiento del foco $Se = 1,95$, lo que demuestra los buenos resultados obtenidos.

Cabe destacar, como previamente se ha descrito que al utilizar el procedimiento del foco, el único dato utilizado para determinar las constantes k_1 y k_2 ha sido la relación $\xi=(\sigma_t/\sigma_c)$ cuando se investiga la resistencia de la roca, o en el caso del hormigón en el cual el parámetro ξ es, $\xi=(\sigma_t/f'_c)$.

Se observa que la principal ventaja del método propuesto se fundamenta en que no se requiere conocer los diferentes intervalos de las tensiones de rotura (σ_3, σ_1).

Por otra parte, para llevar a cabo el ajuste de la curva por mínimos cuadrados y determinar las referidas constantes es imprescindible o necesario utilizar como dato los valores de las tensiones de confinamiento obtenidas a través de las pruebas triaxiales ($\sigma_2=\sigma_3$).

I.10. COMPARACIÓN DE RESULTADOS A TRAVÉS DE LAS RECOPILOCACIONES DE SHEOREY

Sheorey [7] en el apéndice (A) de su libro *Empirical Failure Criteria*, ha preparado una meritoria y muy útil recopilación de ensayos de compresión triaxial ($\sigma_2=\sigma_3$) y poliaxial ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) indicando el autor, tipo de roca y localización.

El objetivo principal en esta sección, es evaluar la aplicación y buenos resultados empleando el procedimiento del foco a través del nuevo criterio de rotura propuesto en esta investigación. Teniendo en cuenta lo previamente indicado, a continuación, se utilizan los valores de las pruebas experimentales de resistencia en diferentes clases de rocas suministradas por Sheorey [7]. También, en el próximo apartado se incluyen varios ejemplos comparativos, utilizando los resultados experimentales realizados por Mogi [9]. Como previamente se ha indicado, las constantes k_1 y k_2 se han determinado a través de las ecuaciones (109) y (106) empleando el procedimiento del foco y conociendo que $\xi=(\sigma_t/\sigma_c)$. En resumen, se tiene:

$$k_1 = \frac{-(1+|\xi|) + \sqrt{(1+7|\xi|)(1-|\xi|)}}{2|\xi|}, \quad k_2 = \frac{[1-k_1(-\xi)]}{(-\xi)^{1/2}}$$

Tabla 2.

Ensayo N° 17 Localización: Strathcona Mine Roca : Granodiorita		Procedimiento del Foco
Esfuerzo principal menor	Esfuerzo principal mayor	$k_1 = 0,83$, $k_2 = 4,35$ $\xi = -0,0486$
$\sigma_3 = \sigma_2$ (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa) - Criterio de Úcar
$\sigma_t = -15,90$	0,00	0,00
0,00	326,80	326,77
5,00	368,30	376,85
10,00	426,80	421,70
15,00	430,50	462,78
20,00	470,00	500,97

Utilizando la tabla 2 se ha determinado un error estándar del valor estimado $Se = 22,90 \text{ MPa}$.

Esta varianza residual permite estimar la variación de los datos experimentales respecto a la curva obtenida. Por otra parte, si los valores estimados de σ_1 están normalmente distribuidos, indica por tanto, que el 68,7% se encuentra dentro del intervalo $\sigma_1 \pm Se$.

De acuerdo a Abellán y Szarvas [12], otra forma de determinar el error con un buen grado de aproximación es:

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{((\sigma_1)_i - f(\sigma_3)_i)}{f(\sigma_3)_i} \right]^2}, \text{ en donde } (\sigma_1)_i \text{ son los valores experimentales,}$$

y $f(\sigma_3)_i$ son los puntos de la función evaluados en $(\sigma_3)_i$ para $i=1,2,3,\dots,n$.

Por cuanto se quiere determinar el porcentaje de aproximación, se debe calcular $A\% = (1-E) \cdot 100$, en donde $A\%$ es la aproximación porcentual de la curva obtenida.

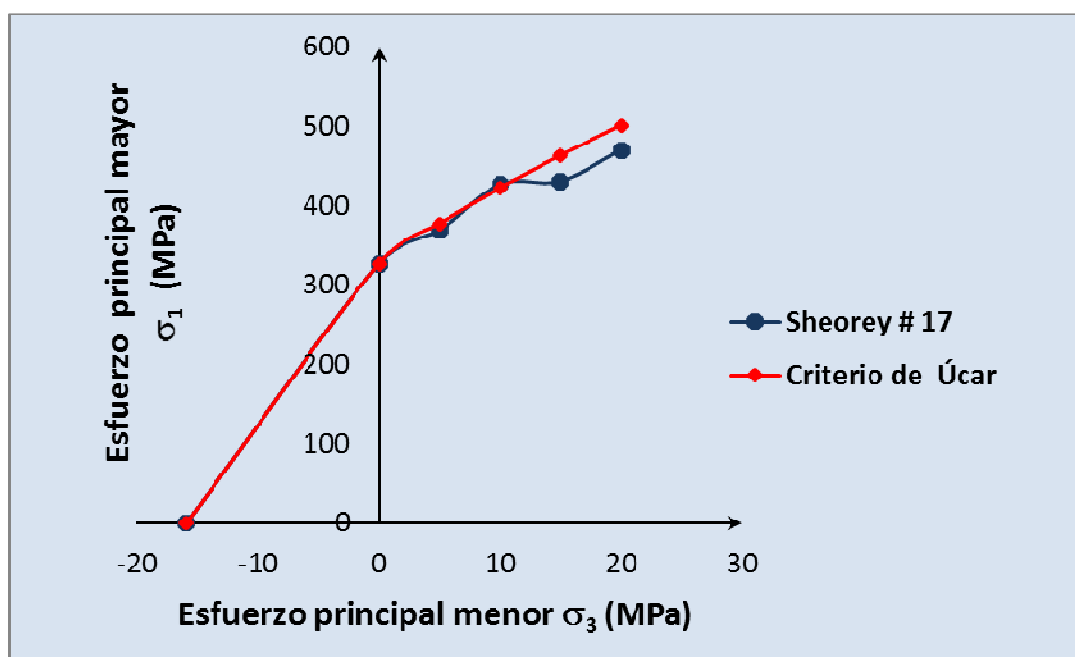


Figura 4. Comparación de los valores de σ_1 a través de la recopilación de Sheorey [7], (ensayo N° 17) y el criterio de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

Tabla 3.

Ensayo N°19 Reportado por Sheorey Localización: C. Canadá Potash Roca: Caliza		Procedimiento del Foco
Esfuerzo principal menor	Esfuerzo Principal mayor	$k_1= 0,756, k_2= 3,487$ $\xi=-0,0733$
$\sigma_3 = \sigma_2$ (MPa)	σ_1(MPa)	σ_1(MPa) - Criterio de Úcar
-9,40	0,00	0,00
0,00	128,10	128,10
0,10	134,70	128,83
1,00	146,40	135,14
10,30	187,00	190,06
20,70	234,90	239,28
27,60	287,10	268,04

Error estándar del valor estimado $Se= 10,52$ MPa

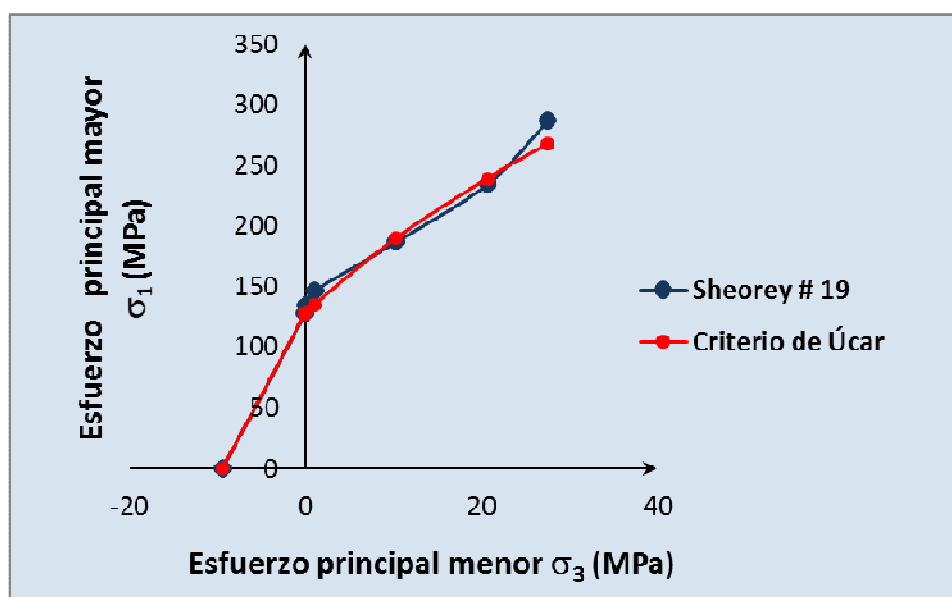


Figura 5. Comparación de los valores de σ_1 a través de la recopilación de Sheorey [7], (Ensayo N° 19) y el criterio de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

Tabla 4.

Ensayo N° 32 Localización: Pniowek Roca: Arenisca		Procedimiento del Foco
Esfuerzo principal menor	Esfuerzo Principal mayor	$k_1 = 0,718$, $k_2 = 3,18$ $\xi = -0,087$
$\sigma_3 = \sigma_2$ (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa) - Criterio de Úcar
-10,90	0,00	0,00
0,00	125,40	125,40
6,30	164,40	160,03
12,10	193,00	187,29
18,10	204,50	212,58
24,20	229,10	236,17
30,20	241,20	257,78
37,20	283,00	281,50
41,40	292,90	295,07
47,90	282,80	315,27
53,90	315,30	333,17
60,80	313,30	353,00

Error estándar del valor estimado $Se = 22,41$ MPa

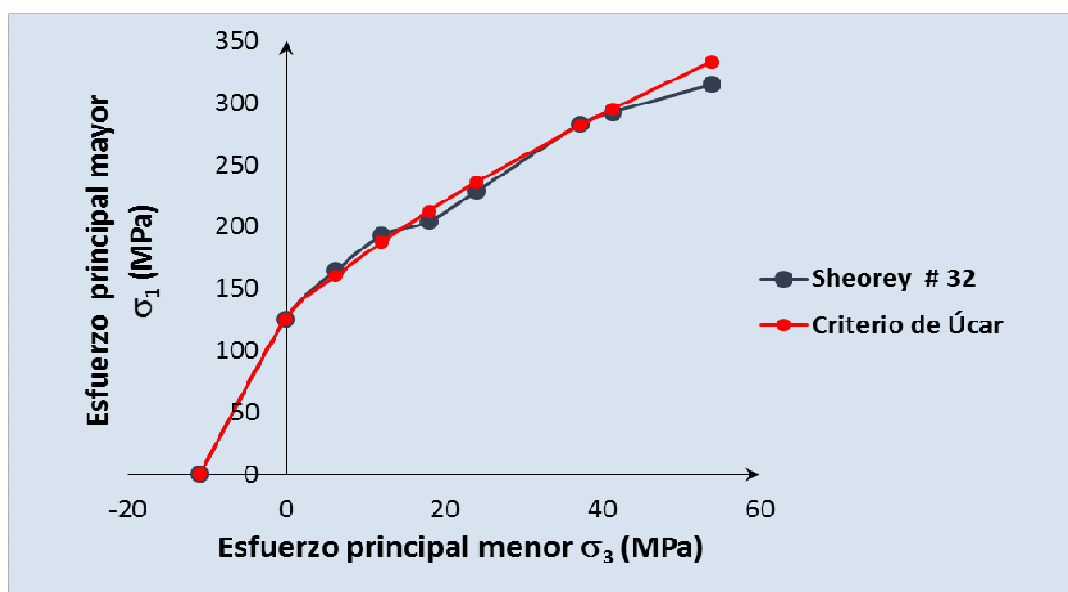


Figura 6. Comparación de los valores de σ_1 a través de la recopilación llevada a cabo por Sheorey [7], (ensayo N° 32) y el criterio de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

Tabla 5.

Comparación de Valores						
σ_c (MPa)	Franklin y Hoek			Úcar Procedimiento del Foco		k_1
179,60	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,878
	0,00	179,60	1,00	1,00	179,58	k_2
	1,60	234,30	1,30	1,13	202,85	5,310
	2,80	249,00	1,39	1,22	218,83	σ_t (MPa)
	5,00	293,10	1,63	1,37	245,68	-6,00
	5,30	270,50	1,51	1,39	249,14	ξ (estimado)
	6,50	273,30	1,52	1,46	262,57	-0,0334
	7,40	284,40	1,58	1,52	272,26	
	7,80	276,80	1,54	1,54	276,47	
	9,30	309,30	1,72	1,62	291,78	
	9,90	312,10	1,74	1,66	297,72	
	10,70	316,00	1,76	1,70	305,47	
	12,80	269,90	1,50	1,81	325,06	
	13,20	359,00	2,00	1,83	328,67	
	15,10	330,10	1,84	1,92	345,41	

Continuación Tabla 5				
16,40	340,40	1,90	1,98	356,47
17,70	362,30	2,02	2,04	367,24
18,00	410,70	2,29	2,06	369,69
19,70	406,50	2,26	2,13	383,32
21,70	415,90	2,32	2,22	398,85
22,90	409,90	2,28	2,27	407,93
25,80	431,10	2,40	2,39	429,21
27,10	392,80	2,19	2,44	438,47
28,50	486,80	2,71	2,50	448,27
28,80	458,00	2,55	2,51	450,35
29,40	485,80	2,70	2,53	454,48
33,90	453,90	2,53	2,70	484,54
34,80	512,70	2,85	2,73	490,37
38,10	543,70	3,03	2,85	511,29
39,20	480,80	2,68	2,88	518,11
43,20	539,80	3,01	3,02	542,35
43,50	541,00	3,01	3,03	544,13
45,50	566,00	3,15	3,10	555,90
49,30	488,40	2,72	3,22	577,74
51,70	523,90	2,92	3,29	591,21
55,80	569,50	3,17	3,42	613,69

Error estándar del valor estimado $Se = 32,83$ MPa

Siguiendo la recopilación llevada a cabo por Sheorey [7], en la tabla (5) se indican los resultados obtenidos por Franklin y Hoek. Localización: Blacking Stone Quarry, Roca: Granito. También se muestran los resultados obtenidos aplicando el procedimiento del foco. Cabe destacar, que los valores de resistencia realizados por Franklin y Hoek no contienen como dato la resistencia a la tracción σ_t . Este inconveniente se solventa a través de la hoja de cálculo EXCEL considerando inicialmente un valor de σ_t , lo que permite conocer el parámetro $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$. Por lo tanto, es posible determinar la tensión principal de rotura σ_1 a través de $k_1 = f(\xi)$, $k_2 = f(k_1)$ y el esfuerzo principal menor σ_3 . Si los resultados analíticos de σ_1 no coinciden con las tensiones principales obtenidas a través de las pruebas experimentales, seguidamente se lleva a cabo otro tanteo en función del nuevo valor asignado ξ , hasta lograr una buena aproximación.

En conclusión, mediante ensayo y error se ha determinado el valor más adecuado de ξ y por ende los parámetros k_1 y k_2 . Todo esto con el propósito

fundamental de que, al aplicar el criterio de rotura propuesto en esta investigación, el esfuerzo principal mayor σ_1 se aproxime lo mejor posible a los valores de compresión triaxial, de acuerdo a las pruebas de laboratorio realizadas por los referidos investigadores.

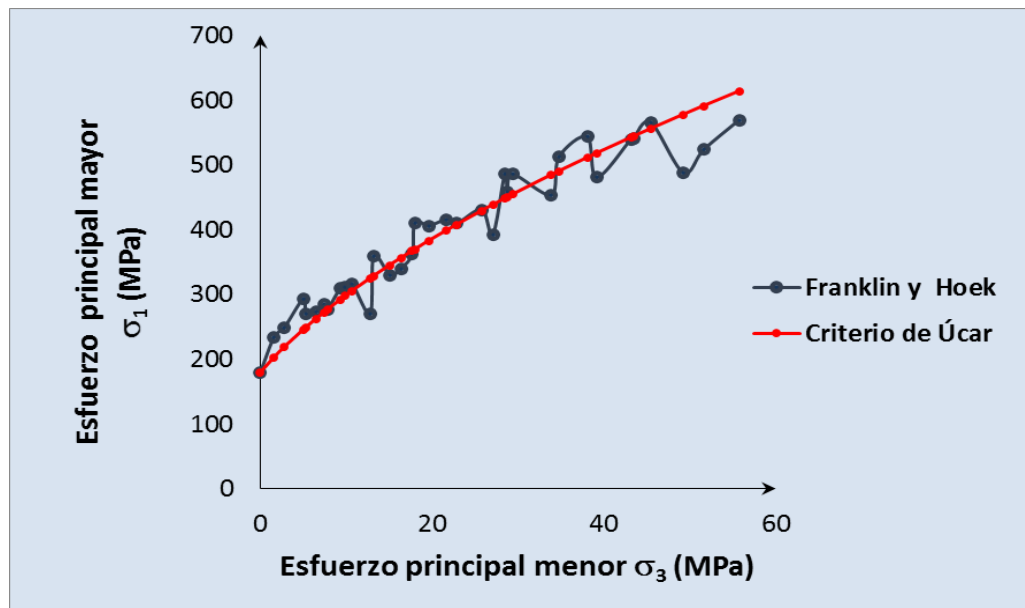


Figura 7. Comparación de los valores de σ_1 realizadas por Franklin y Hoek recopiladas por Sheorey [7], (ensayo N° 60) y el criterio empírico de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

I.II.COMPARACIÓN DE RESULTADOS A TRAVÉS DE LAS INVESTIGACIONES REALIZADAS POR MOGI

En esta sección se comparan las experiencias de Mogi [9] con el nuevo criterio de rotura aplicando el procedimiento del foco explicado previamente. Dicho investigador ha realizado una gran cantidad de pruebas de compresión triaxial y poliaxial en diferentes tipos de rocas, las cuales en forma resumida están indicadas en su excelente libro *Experimental Rock Mechanics*.

Como se sabe uno de los retos que existe actualmente en la ingeniería de rocas se fundamenta en lograr desarrollar un criterio de rotura a través una metodología real y efectiva en tres dimensiones.

Cabe señalar que muchos investigadores han estudiado en detalle este importante tema de la mecánica de las rocas, en especial Mogi [9] quien ha

indicado en sus estudios experimentales a partir de 1964 que existen evidencias notables que demuestran la influencia del esfuerzo principal intermedio σ_2 en la resistencia de la roca. Adicionalmente, desarrolló un equipo triaxial verdadero (True Triaxial Apparatus), en el cual los tres esfuerzos pueden ser aplicados independientemente, y empleando altas presiones.

Sin lugar a dudas, su laboriosa investigación ha contribuido en forma relevante al ampliar las condiciones de rotura de la roca a través de un estado poliaxial⁶ de esfuerzos $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

En esta primera fase de estudio y como ejemplo de comparación se han utilizado los valores de las pruebas de compresión triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$) obtenidas y reportadas por Mogi [9] de la dolomita de Duham. En estas condiciones, se determina el valor más adecuado del parámetro ξ . Por otra parte, cabe señalar que se ha llevado a cabo el mismo procedimiento de tanteo para calcular el valor $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$ indicado en la tabla (5).

Tabla 6.

Mogi [9] - Dolomita de Dunham				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
261	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 / σ_c	σ_1 / σ_c	σ_1 (MPa)	0,7362
	-21	0	0,00	0,00	0,00	k_2
	0	261	1,00	1,00	261,00	3,3165
	25	400	1,53	1,52	397,27	σ_t (MPa)
	45	487	1,87	1,85	483,89	-21
	65	568	2,18	2,15	560,21	ξ
	85	620	2,38	2,41	629,69	-0,08045 (Estimado)
	105	682	2,61	2,66	694,21	
	125	725	2,78	2,89	754,91	

⁶ En el capítulo 3 se describe en detalle a través de gráficos y ejemplos la ecuación que vincula las tensiones principales en la rotura de la roca, pero considerando un estado poliaxial de esfuerzos (triaxial verdadero). Este nuevo criterio se compara con las pruebas experimentales de Mogi [9], junto con otros investigadores.

Para aclarar el procedimiento, los pasos a seguir se indican a continuación: Primeramente, con los valores de ($\sigma_3 = \sigma_2$) y de σ_1 de las pruebas triaxiales de la tabla 6, se comienza con un valor estimado de σ_t . Por ejemplo, se ha considerado que $\sigma_t = -5,00$ MPa, comparándose seguidamente los resultados gráficamente.

Si se observa que hay diferencias entre ambas curvas, se procede a llevar a cabo otro tanteo en función del nuevo valor asignado $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$ hasta lograr la aproximación deseada. Las gráficas anexas muestran ambas curvas hasta obtener que la curva plana de rotura propuesta se aproxime lo mejor posible a la curva experimental. El valor final de la tensión de tracción corresponde poco más o menos a $\sigma_t = -21,00$ MPa, siendo además $\xi = (\sigma_t / \sigma_c) = -0,080$.

Tabla 6a. Valores de prueba

$\sigma_c = 261,00$ MPa	
σ_t (MPa)	$\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$
-5	-0,019
-10	-0,038
-15	-0,057
-21	-0,080

Primer tanteo: $\sigma_t = -5,00$ MPa y $\xi = (\sigma_t / \sigma_c) = -0,019$

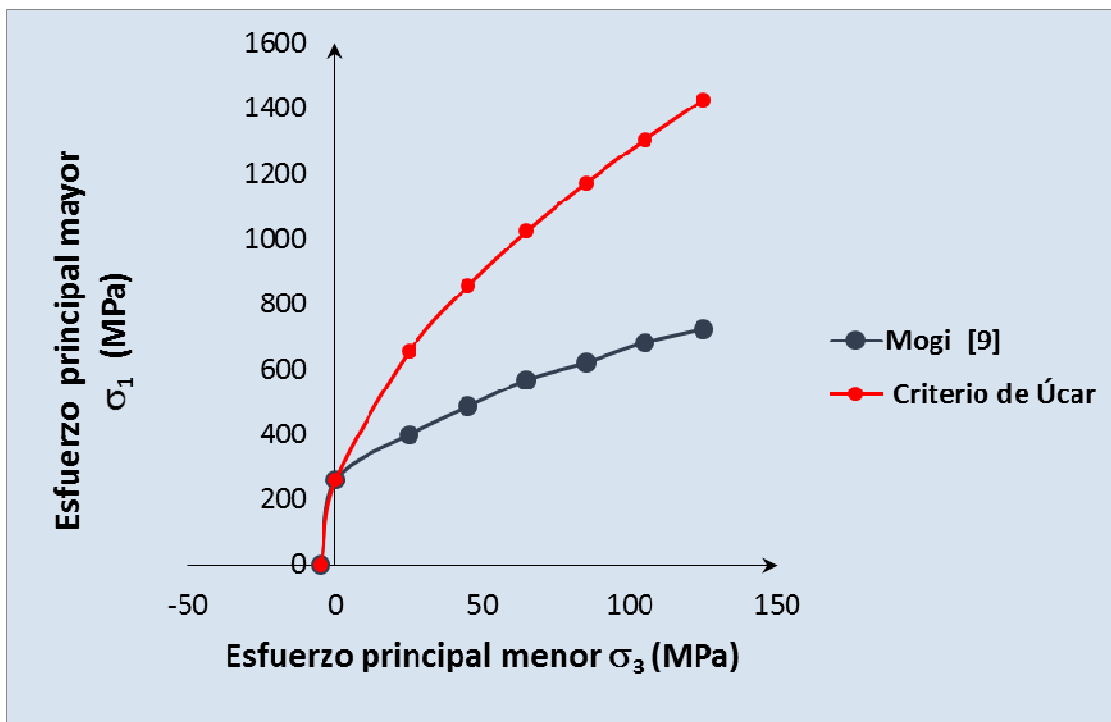


Figura 8. Comparación entre la curva experimental de Mogi [9] y la obtenida aplicando el criterio empírico de rotura de Úcar [10] mediante el procedimiento del foco.

Segundo tanteo: $\sigma_t = -10,00$ MPa y $\xi = (\sigma_t / \sigma_c) - 0,038$

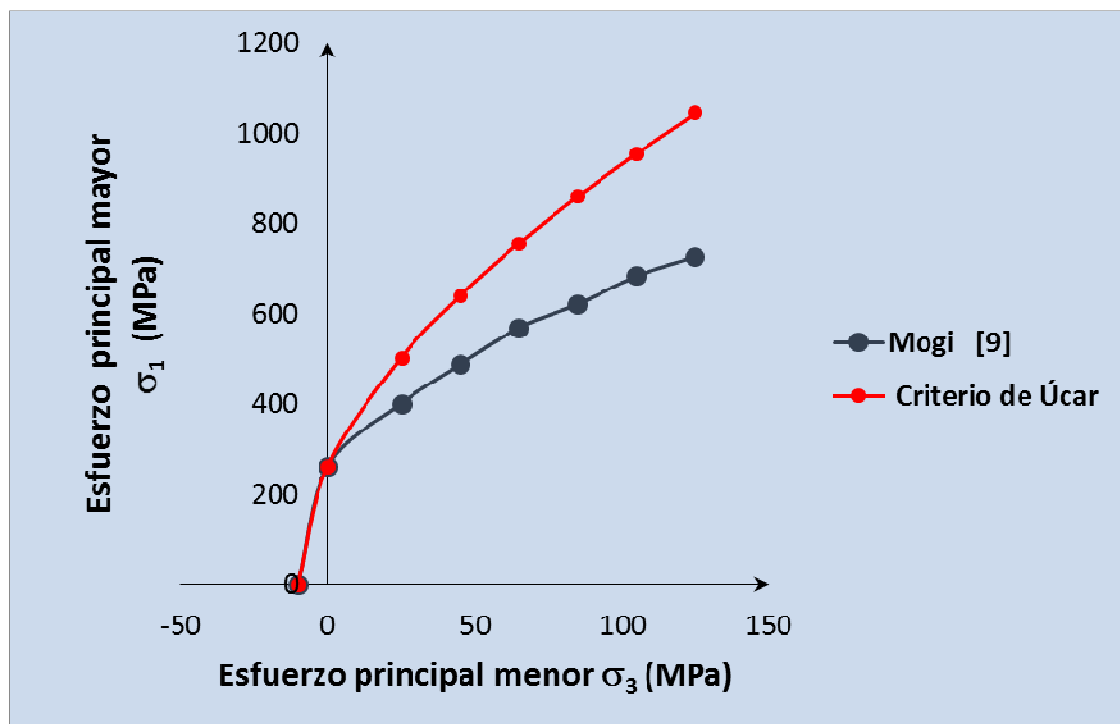


Figura 9. Comparación entre la curva experimental de Mogi [9] y la obtenida aplicando el criterio empírico de rotura de Úcar [10] mediante el procedimiento del foco.

Tercer tanteo: $\sigma_t = -15,00$ MPa y $\xi = (\sigma_t / \sigma_c) = -0,057$

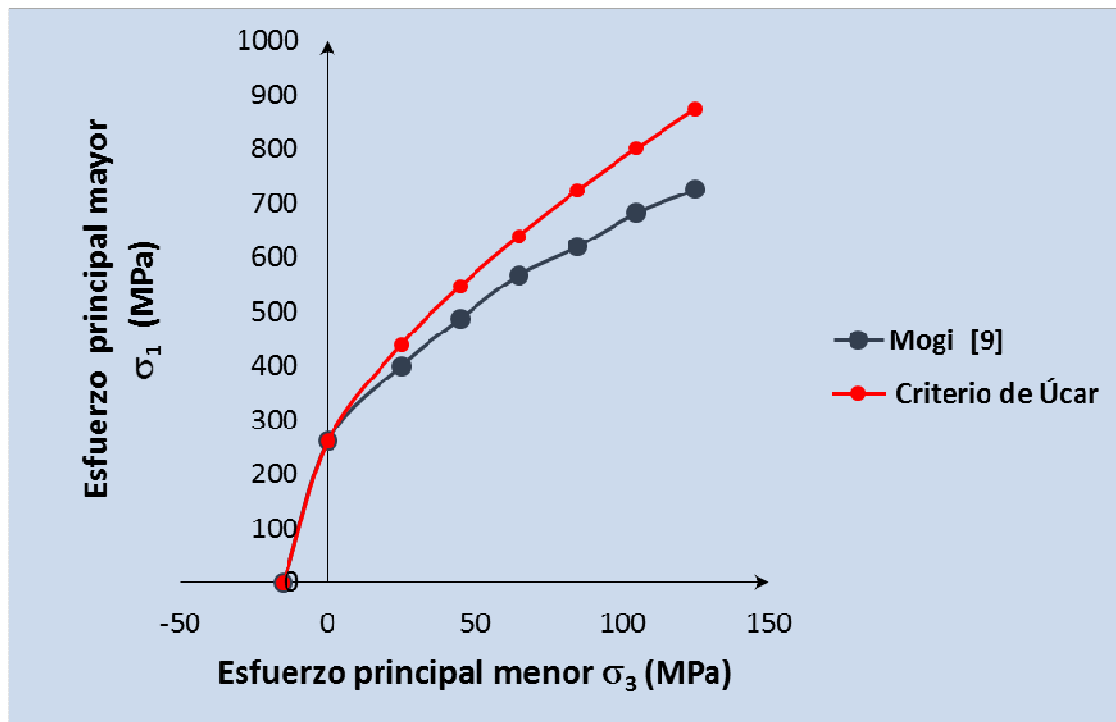


Figura 10. Comparación entre la curva experimental de Mogi [9] y la obtenida aplicando el criterio empírico de rotura de Úcar [10] mediante el procedimiento del foco.

Última prueba de ensayo y error: $\sigma_t = -21,00$ MPa y el parámetro adimensional $\xi = (\sigma_t / \sigma_c) = -0,080$

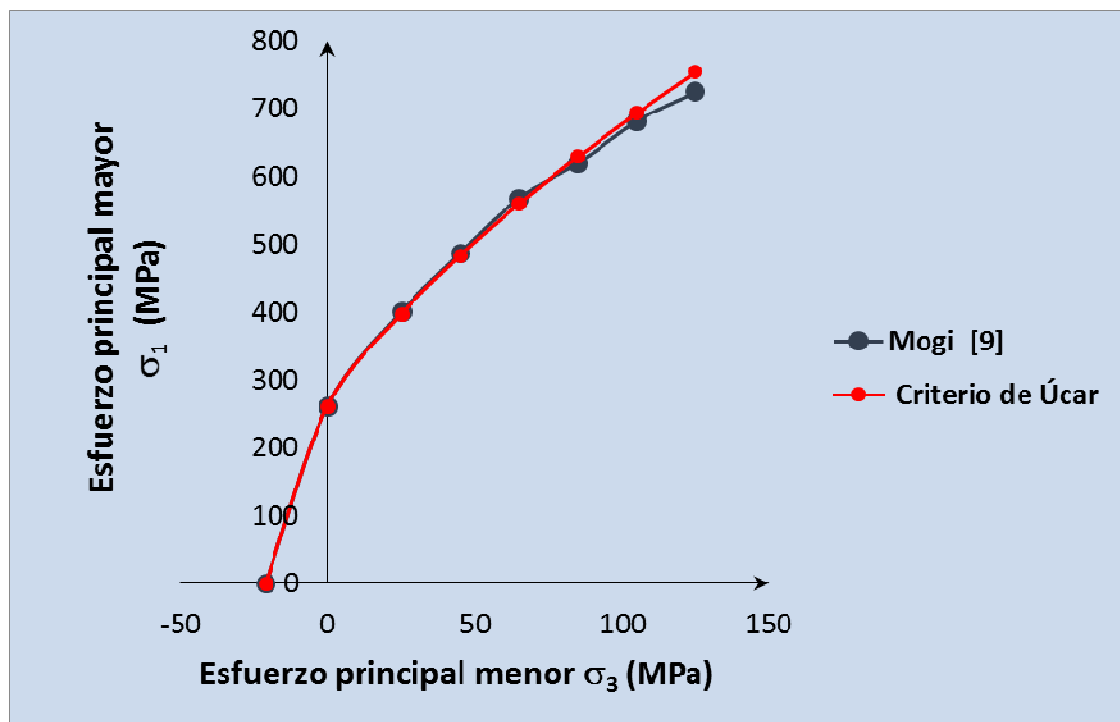


Figura 11. Comparación entre la curva experimental de Mogi [9] y la obtenida aplicando el criterio empírico de rotura de Úcar [10] mediante el procedimiento del foco.

Tabla 7.

Mogi [9] - Mármol de Yamaguchi				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores - ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
81,00	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,635
	0,00	81,00	1,00	1,00	81,00	k_2
	6,00	118,00	1,40	1,30	105,10	2,667
	12,50	130,00	1,60	1,57	127,10	σ_t (MPa)
	25,00	175,00	1,60	2,02	163,50	-9,72
	40,00	210,00	2,59	2,48	200,80	ξ
	55,00	246,00	3,04	2,89	234,20	- 0,12 (Estimado)
	70,00	272,00	3,56	3,27	264,90	
	85,00	295,00	3,64	3,63	293,70	
	100,00	324,00	4,00	3,96	321,10	
	150,00	398,00	4,91	4,99	404,70	
	200,00	454,00	5,60	5,93	480,70	

Error estándar del valor estimado $Se = 11,17\text{MPa}$

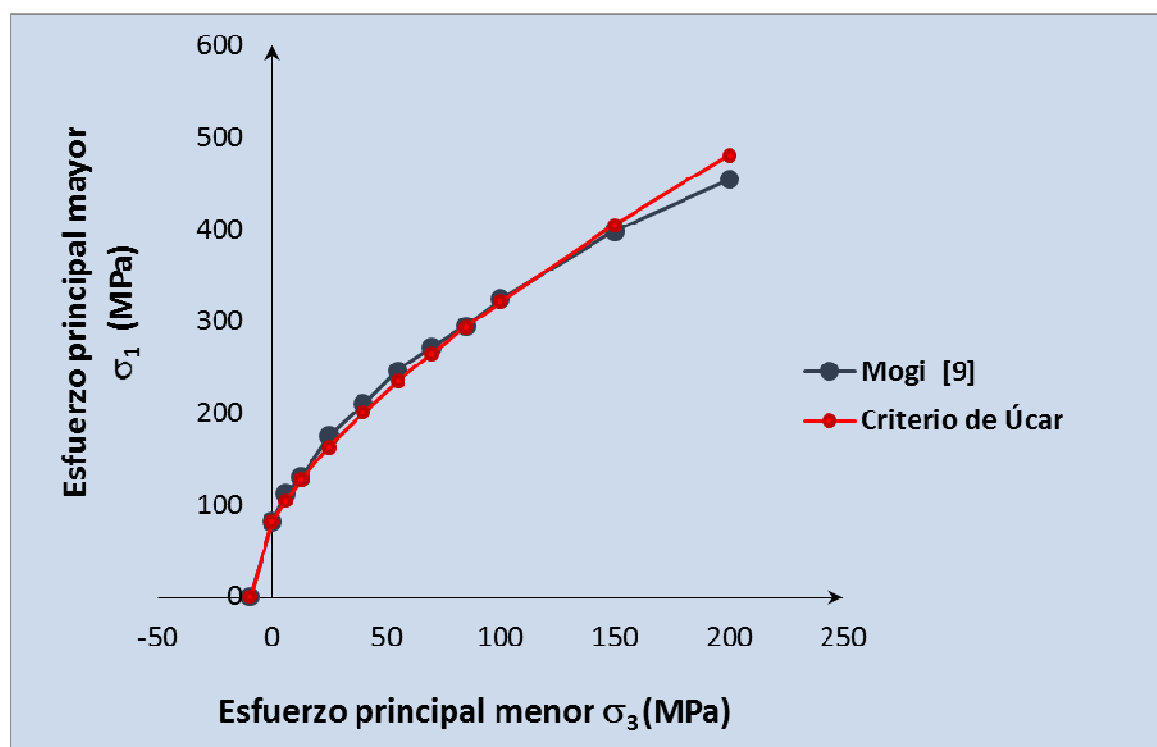


Figura 12. Comparación de los valores de σ_1 a través de las experiencias Mogi [9] y el criterio empírico de rotura de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

Tabla 8.

Mogi [9]- Caliza de Solnhofen				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores - ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
310	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,5632
	-47	0	0,00	0,00	0,00	k_2
	0	310	1,00	1,00	310,00	2,3488
	20	397	1,28	1,21	376,26	σ_t (MPa)
	40	449	1,45	1,40	434,75	-47
	60	473	1,53	1,57	488,07	ξ
	80	528	1,70	1,73	537,60	-0,1516 (Estimado)

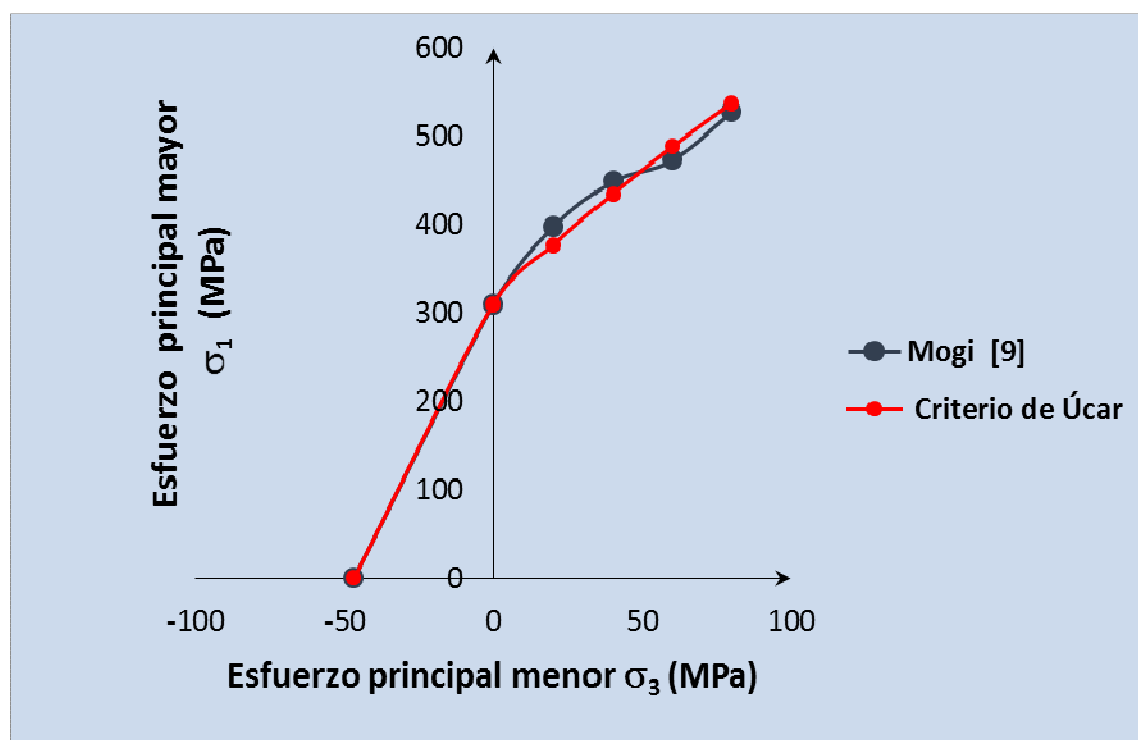


Figura 13. Comparación de los valores de σ_1 a través de las experiencias Mogi [9] y el criterio empírico de rotura de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco.

Tabla 9.

Mogi [9]- Granito de Inada				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores - ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
229	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,8846
	-7,2	0	0,00	0,00	0,00	k_2
	0	229	1,00	1,00	229,00	5,4827
	20	508	2,22	1,99	456,78	σ_t (MPa)
	40	692	3,02	2,67	611,78	-7,2
	70	841	3,67	3,48	797,30	ξ
	100	1003	4,38	4,17	953,88	-0,0314
	150	1138	4,97	5,15	1179,34	(Estimado)
	200	1301	5,68	6,02	1377,61	
	230	1497	6,54	6,50	1487,69	

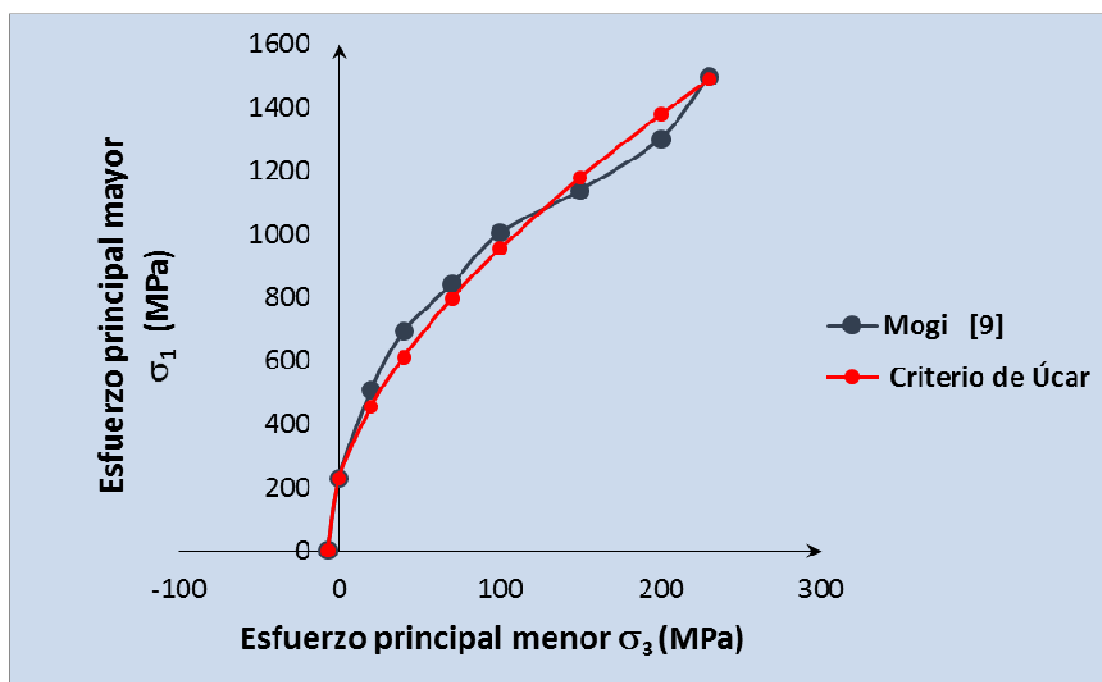


Figura 14. Comparación de los valores de σ_1 a través de las experiencias Mogi [9] y el criterio empírico de rotura de Úcar [10] aplicando el procedimiento del foco

Tabla 10.

Zhang ⁷				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores - ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
100	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,7513
	-7,5	0	0,00	0,00	0,00	k_2
	0	100	1,00	1,00	100,00	3,4457
	15	193	1,93	1,80	180,35	σ_t (MPa)
	30	253	2,53	2,39	239,18	-7,5
	45	300	3,00	2,89	289,11	ξ
	60	339	3,39	3,34	333,81	-0,075
	75	365	3,65	3,75	374,96	(Estimado)
	100	419	4,19	4,38	438,03	

⁷ Zhang, L (2008) "A Generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion", Rock mechanics and Rock engineering, Vol 41, N° 6, pp893-915.

Los valores reportados por Zhang⁸, corresponden a muestras ensayadas por Mogi (1971) y Al-Ajmiand y Zimmerman (2005) en roca traquita de la localidad de Mizuho.

Aplicando nuevamente la ecuación de rotura indicada en (34), y considerando además el caso particular que $(\sigma_2/\sigma_c) = (\sigma_3/\sigma_c) = 1$ junto con valores del cociente $\xi = (\sigma_t/\sigma_c) \approx -1/10$ a $-1/25$, se obtiene con una aceptable aproximación que la razón (σ_1/σ_c) se encuentra definida en el intervalo:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 (1 - \xi) + k_2 (1 - \xi)^{1/2} \approx (k_1 + k_2) \approx 4,00 \text{ a } 5,00$$

Cabe señalar que a través de la Tabla N°10, $(k_1 + k_2) = 4,19$, lo que indica por lo tanto que $\sigma_1 = 4,19 \cdot \sigma_c$. Sin embargo, si se incluye el conocido parámetro $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$ en la ecuación anterior resulta el valor del cociente: $(\sigma_1/\sigma_c) = 4,38$

En conclusión, al comparar los resultados experimentales con el criterio de rotura propuesto, se ha determinado que el cociente $(\sigma_1/\sigma_c) \approx (k_1 + k_2)$.

Este es un importante factor, el cual corresponde para el caso particular cuando $(\sigma_3/\sigma_c) = (\sigma_2/\sigma_c) = 1$, aplicable tanto para roca intacta como el hormigón.

Para mayor detalle véase la sección (1.13.1) y la Figura (20). En la referida figura se observa poco más o menos que $(\sigma_1/\sigma_c) \approx 4,7$ a $5,10$.

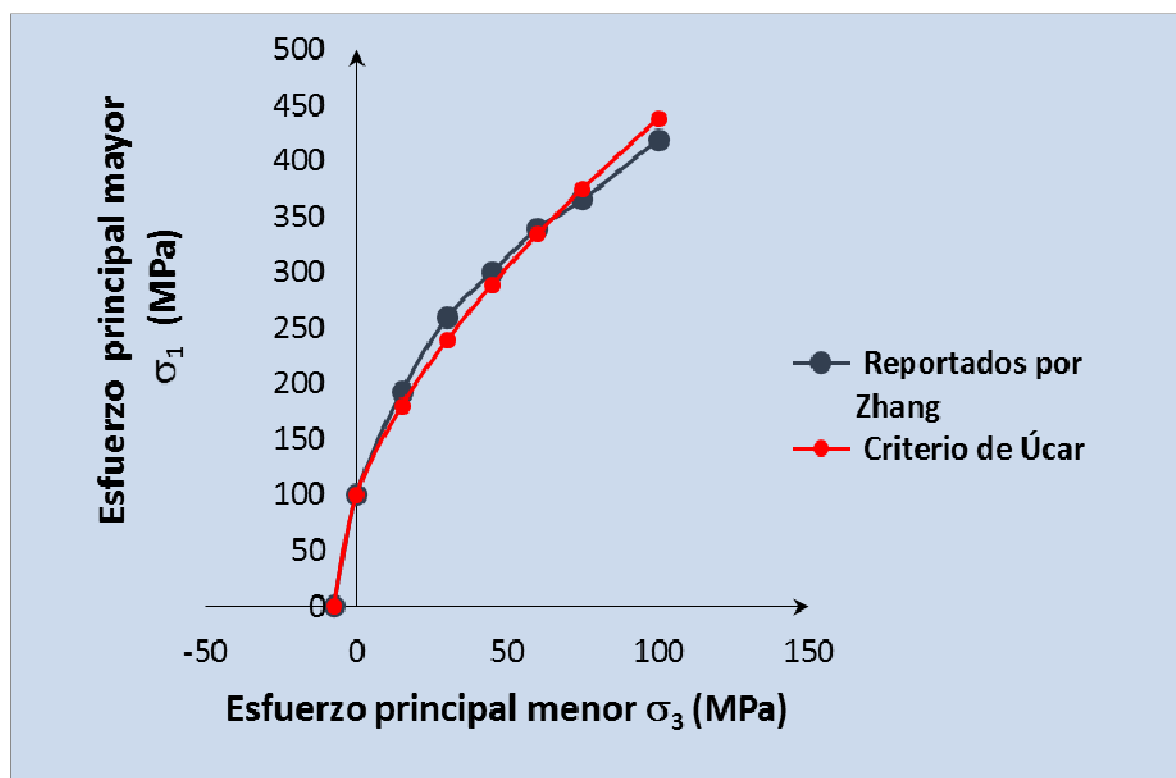


Figura 15. Comparación entre los valores de σ_1 obtenidos experimentalmente por Zhang y el criterio empírico de rotura de Úcar [10].

Finalmente, se compara una de las tantas pruebas para determinar el comportamiento del hormigón cuando está sometido a compresión triaxial y poliaxial llevadas a cabo y reportadas por la Universidad Técnica de Dinamarca (Technical University of Denmark). En este estudio preliminar describen los criterios de rotura del hormigón, los factores que afectan su resistencia y una descripción detallada de las pruebas de resistencia llevadas a cabo por diferentes investigadores.

La tabla siguiente, corresponde a las pruebas realizadas por Balmer en probetas de dimensiones estándar de 15x30cm y reportada en el estudio de Dahl, K, "Preliminary State of the art report on multiaxial strength of concrete", Serie R, N° 262, Danmarks Teknische Højskole, 77

Tabla 11.

Dahl ⁸ – Danmarks Tekcnike Hojskøle				Úcar-Procedimiento del Foco		
σ_c (MPa)	Comparación de Valores - ($\sigma_3 = \sigma_2$)					k_1
24,60	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	0,8742
	-0,90	0,00	0,00	0,00	0,00	k_2
	0,00	24,60	1,00	1,00	24,60	5,2171
	6,90	71,50	2,91	3,20	78,81	σ_t (MPa)
	17,20	117,00	4,76	5,11	125,72	-0,90
	34,50	173,00	7,03	7,51	184,76	ξ
	51,70	225,20	9,15	9,49	233,52	-0,0345 (Estimado)
	68,90	273,60	11,12	11,26	277,09	
	103,40	366,60	14,90	14,45	355,35	
	137,80	461,10	18,74	17,31	425,91	
	172,30	531,10	21,59	20,00	491,88	

⁸ Dahl, K (1990)" Preliminary State of the art report on multiaxial strength of concrete", Serie R, N° 262, Danmarks Tekcnike HØjskole, 77p

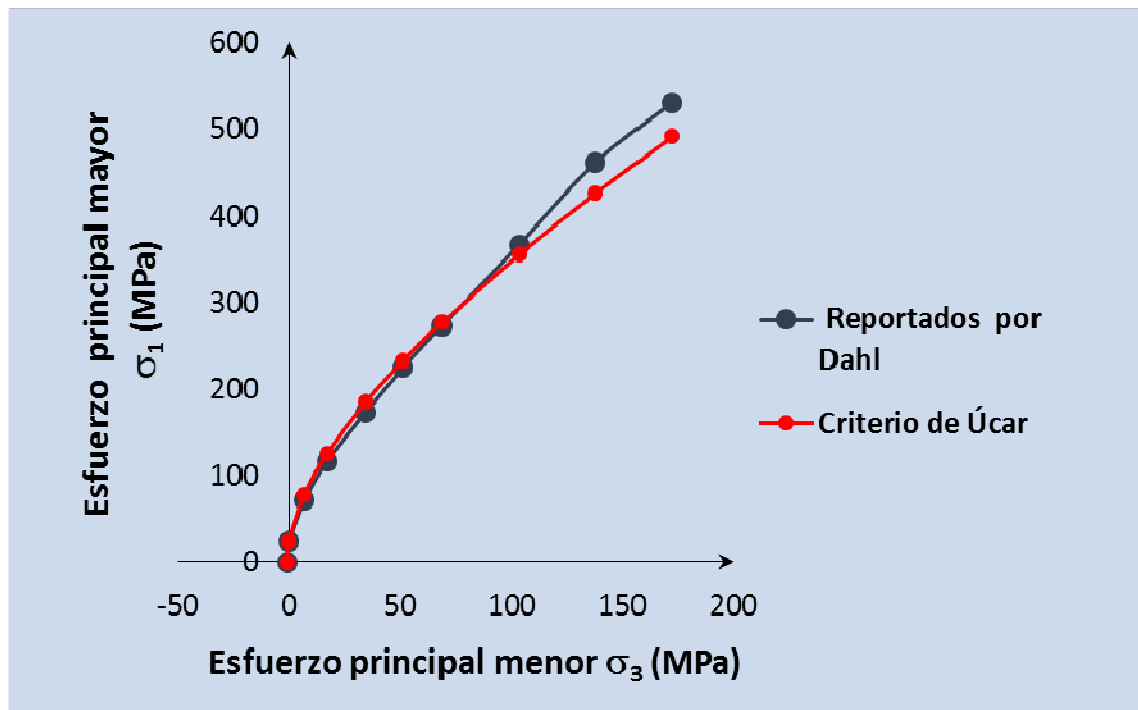


Figura 16. Comparación entre los valores de σ_1 reportados por Dahl⁹ de los ensayos realizados por Balmer en probetas cilíndricas de hormigón de 150 x 30 mm, y el criterio empírico de rotura de Úcar [10]

I.12. DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE ROTURA APLICANDO LOS ESTUDIOS EXPERIMENTALES DE AIRE

Con la finalidad de apreciar nuevamente la utilidad del nuevo criterio de rotura, a continuación, se consideran los resultados de las investigaciones realizadas por Aire (2002) en su tesis doctoral sobre el comportamiento del hormigón cuando está sometido a compresión triaxial.

Dicho investigador, ensayó probetas cilíndricas de hormigón de 150x300 mm a diferentes niveles de confinamiento pero considerando la condición en la cual $\sigma_3 = \sigma_2$, es decir el esfuerzo principal menor e intermedio son iguales.

Investigó dos casos específicos con resistencias a compresión simple de 35 MPa y de 68 MPa (hormigón de alta resistencia).

La Tabla 12, muestra los valores de las tensiones σ_3 y σ_1 , para el caso particular de las pruebas de hormigón con una resistencia $f'_c = 35$ MPa.

Tabla 12. Resultados de los ensayos triaxiales realizados por Aire (2002).

Valores de resistencia del Hormigón a diferentes estados de confinamiento. $f'_c = 35\text{MPa}$	σ_3 (MPa)	$\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 / f'_c$	σ_1 (MPa)	$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / f'_c$
	0	0	$f'_c = 35$	1
	7	0,20	71	2,03
	17	0,49	103	2,94
	28	0,80	132	3,77
	35	1	151	4,31

La fase siguiente es determinar las constantes k_1 y k_2 a través del nuevo criterio propuesto y comparar los resultados con los valores de σ_1 de la Tabla 14.

Por cuanto, Aire (2002) en sus pruebas de laboratorio no determinó la resistencia a tracción del hormigón σ_t , es necesario hallar una constante adicional la cual corresponde a $\xi = \sigma_t / f'_c$. Por tanto, se aplicará nuevamente la ecuación (34) representada por:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2}$$

También, para el caso del ensayo de compresión simple, se debe cumplir que $\sigma_1 = \sigma_c$ y por tanto $\sigma_3 = 0$, obteniéndose a través de esta última ecuación que: $k_1(-\xi) + k_2(-\xi)^{1/2} = 1$.

Las otras dos ecuaciones se determinan considerando los valores indicados en la Tabla 12, para el valor intermedio de $\sigma_3 = 17$ MPa y el extremo con $\sigma_3 = 35$ MPa.

En forma adimensional se tiene: $(\sigma_3 / f'_c, \sigma_1 / f'_c) = (0,49, 2,94)$ y $(1, 4,31)$. En estas condiciones el sistema de ecuaciones simultáneas no lineales es:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2} \\ 2,94 &= k_1 (0,49 - \xi) + k_2 (0,49 - \xi)^{1/2} \\ 4,31 &= k_1 (1 - \xi) + k_2 (1 - \xi)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

Como previamente se ha mencionado, el otro procedimiento recomendado (véase Tabla 5. Ensayos de Franklin y Hoek y Tabla 6. Ensayos de Mogi) es considerar inicialmente un valor de σ_t , y calcular la relación $\xi = \sigma_t / f'_c$ hasta lograr mediante un número determinado de tanteos (ensayo y error) el valor más adecuado de las constantes k_1 y k_2 .

Continuando con el sistema de tres ecuaciones previamente indicados y aplicando el programa matemático asistido por el ordenador EES (*Engineering Equation Solver*), las constantes obtenidas son:

$k_1 = 0,67$, $k_2 = 3,40$ y $\xi = \sigma_t / f'_c = -0,0778$, por lo tanto $\sigma_t = -2,72$ MPa (valor teórico estimado). A través de la ecuación (42) el ángulo de rotura (α) que forma el plano de falla con el esfuerzo principal menor es el siguiente:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}} = \tan^2 \alpha$$

Tabla 13.

$\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 / f'_c$	$\partial \bar{\sigma}_1 / \partial \bar{\sigma}_3$	α°	β°
0	6,765	68,97	47,94
0,20	3,895	63,13	36,26
0,49	2,926	59,69	29,38
0,80	2,484	57,61	25,21
1	2,3075	56,64	23,29

Adicionalmente, se ha determinado β , el cual corresponde al ángulo que forma la recta tangente a la envolvente de rotura con la horizontal en cada punto de coordenadas (σ_n, τ_α) .

Como se ha mencionado previamente $\beta=\phi_i$, es decir el ángulo de fricción interna instantáneo.

Tabla 14.

Valores experimentales según Aire [13] en probetas de hormigón sometidas a compresión triaxial				Valores utilizando el Criterio de Úcar	
σ_3 (MPa)	$\overline{\sigma}_3$	σ_1 (MPa)	$\overline{\sigma}_1$	$\overline{\sigma}_1$	σ_1 (MPa)
0	0	$f'_c=35$	1	1	$f'_c=35$
7	0,20	71	2,03	1,98	69,30
17	0,49	103	2,94	2,94	103
28	0,80	132	3,77	3,77	132
35	1	151	4,31	4,25	148,80
$\overline{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{f'_c}, \overline{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{f'_c} \quad \overline{\sigma}_1 = 0,67 (\overline{\sigma}_3 - \xi) + 3,40 (\overline{\sigma}_3 - \xi)^{1/2} \therefore \xi = -0,0778$					

Seguidamente, se determina la resistencia al corte y la tensión normal para cada intervalo de tensiones (σ_3, σ_1).

Expresando la ecuación (6) en forma adimensional se obtiene primeramente para cada valor de la tensión σ_3 y σ_1 la relación (σ_n / f'_c) y (τ_α / f'_c) . Luego se determina el esfuerzo normal σ_n y la resistencia al corte τ_α actuando sobre el plano de rotura de inclinación (α) con la horizontal.

Como ejemplo, se ha considerado el ensayo de compresión simple. Por lo tanto:

$(\sigma_3 / f'_c) = 0$ y $(\sigma_1 / f'_c) = 1$, obteniéndose:

$$\frac{\sigma_n}{f'_c} = \frac{\sigma_3}{f'_c} + \frac{\left(\frac{\sigma_1}{f'_c} - \frac{\sigma_3}{f'_c} \right)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} = \frac{1}{(1 + 6,765)} = 0,1288$$

El esfuerzo normal como una fracción de f'_c es,

$$\sigma_n = 0,1288 \cdot f'_c = 4,508 \text{ MPa}, \quad f'_c = 35,00 \text{ MPa}$$

Igualmente, la tensión normal puede obtenerse a través de la conocida ecuación:

$$x = \bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{f'_c} = \frac{\sigma_1}{f'_c} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_3}{f'_c} \sin^2 \alpha = 1 \cdot \cos^2 68,97^\circ = 0,1288$$

Por otra parte, la resistencia al cortante expresada adimensionalmente y definida a través de (49) es la siguiente:

$$y = \bar{\tau}_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{f'_c} = \left(x - \bar{\sigma}_3 \right) \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\text{Siendo, } x = \frac{\sigma_n}{f'_c} \quad y \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{f'_c}$$

La cual equivale a escribir:

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{f'_c} = \left(\frac{\sigma_n}{f'_c} - \frac{\sigma_3}{f'_c} \right) \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2} \right) = 0,129 \tan 68,97^\circ = 0,335$$

$$\tau_\alpha = 0,335 \cdot f'_c = 11,73 \text{ MPa}$$

Igual valor se obtiene a través de la ecuación (55), o empleando la conocida expresión:

$$\frac{\tau_\alpha}{f'_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{f'_c} - \frac{\sigma_3}{f'_c} \right) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (1) \sin 137,94^\circ = 0,335$$

En la Tabla 14a, se indican los diferentes valores correspondientes de la tensión normal y la resistencia cortante para cada intervalo (σ_3 , σ_1). En la Fig. 17, se observan los círculos de Mohr de los ensayos triaxiales y la envolvente no lineal de rotura.

Cabe señalar que la Fig. 18 representa la relación entre las tensiones principales (σ_3, σ_1) junto con el nuevo el nuevo criterio empírico de rotura, el cual permite calcular $\sigma_1 = f(\sigma_3, \xi, k_1, k_2)$ con un buen nivel de aproximación para diferentes presiones de confinamiento.

A la vez debe indicarse el beneficio de obtener una envolvente curva, por cuanto se ajusta con mayor precisión a los valores reales de las tensiones actuando sobre los planos de rotura, además de la evidente diferencia al compararse con la envolvente lineal (véase Fig. 19), en particular en la zona de tracción y de compresión sin confinar. Por otra parte, al incrementarse la presión de confinamiento la pendiente de la curva tiende a disminuir.

Obsérvese también a través de la Tabla 13 como el ángulo $\beta = 47,94^\circ$ (relación $\sigma_3 / f'_c = 0$) disminuye a $\beta = 23,29^\circ$ al incrementarse el cociente $(\sigma_3 / f'_c) = 1$.

Tabla 14a. Tensión normal y resistencia al corte para cada intervalo
($\sigma_3 / f'_c, \sigma_1 / f'_c$)

σ_3 / f'_c	σ_1 / f'_c	σ_n / f'_c	τ_α / f'_c	σ_n (MPa)	τ_α (MPa)
0	1,00	0,129	0,335	4,510	11,72
0,20	1,98	0,564	0,718	19,73	25,12
0,49	2,94	1,114	1,067	38,99	37,36
0,80	3,77	1,652	1,344	57,83	47,02
1,00	4,25	1,982	1,4927	69,39	52,24

La Tabla 14a, muestra también los valores de σ_n y τ_α pertenecientes a la referida curva de resistencia intrínseca, los cuales se han determinado conociendo previamente los esfuerzos principales σ_3 y σ_1 y el ángulo α .

En estas condiciones se construye la curva considerando las coordenadas de las tensiones (σ_n, τ_α) .

Lógicamente, la forma elegante de obtener la envolvente de rotura es a través de la ecuación (69), en función de la tensión normal σ_n y el ángulo que forma la recta tangente a la envolvente de rotura con la horizontal $\beta = \phi_i$ (ángulo de fricción interna instantáneo).

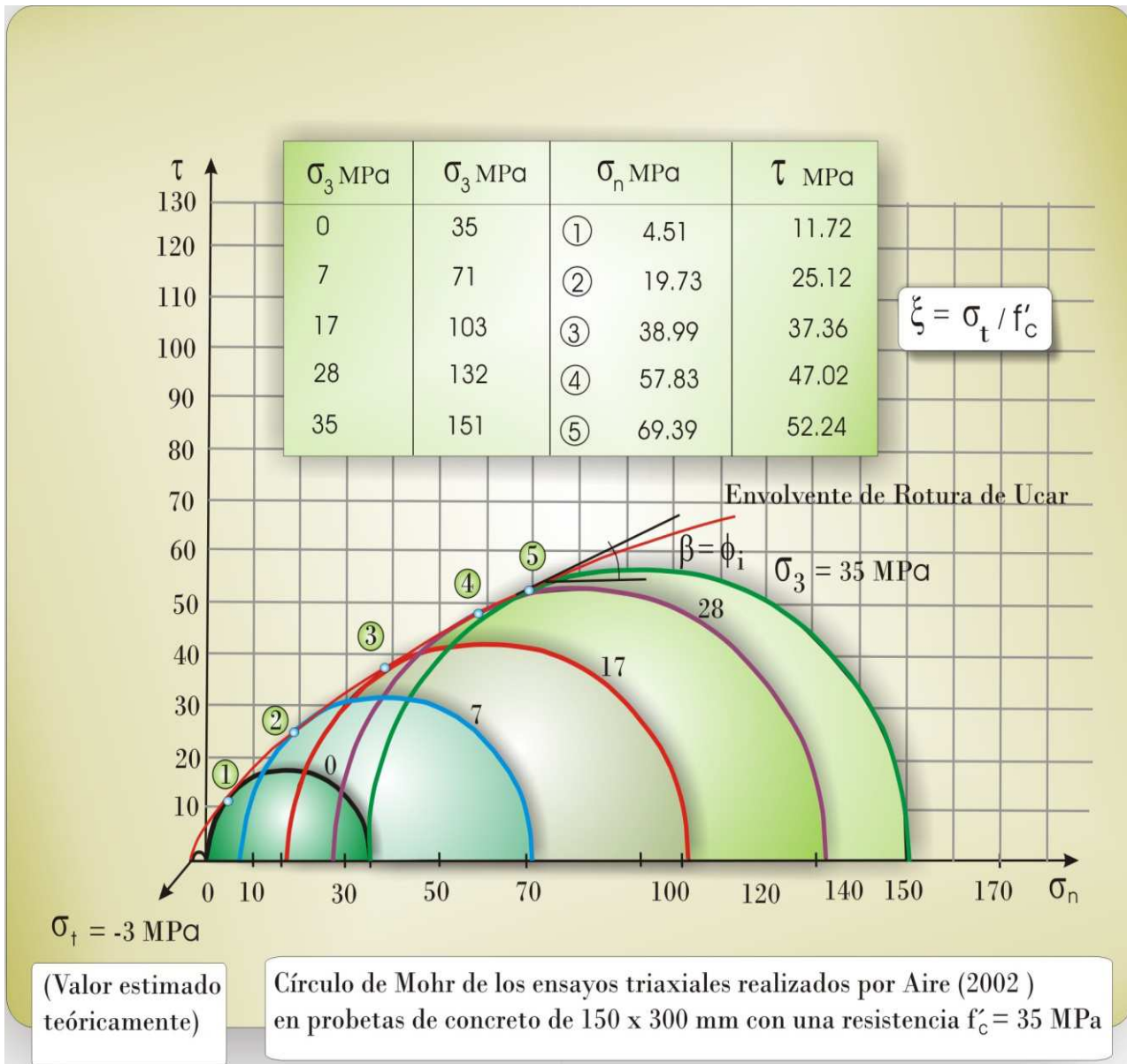


Figura 17. Círculo de Mohr de los ensayos triaxiales realizados por Aire (2002) en probetas de hormigón de 150 x 300 mm con una resistencia de $f'_c = 35$ MPa.

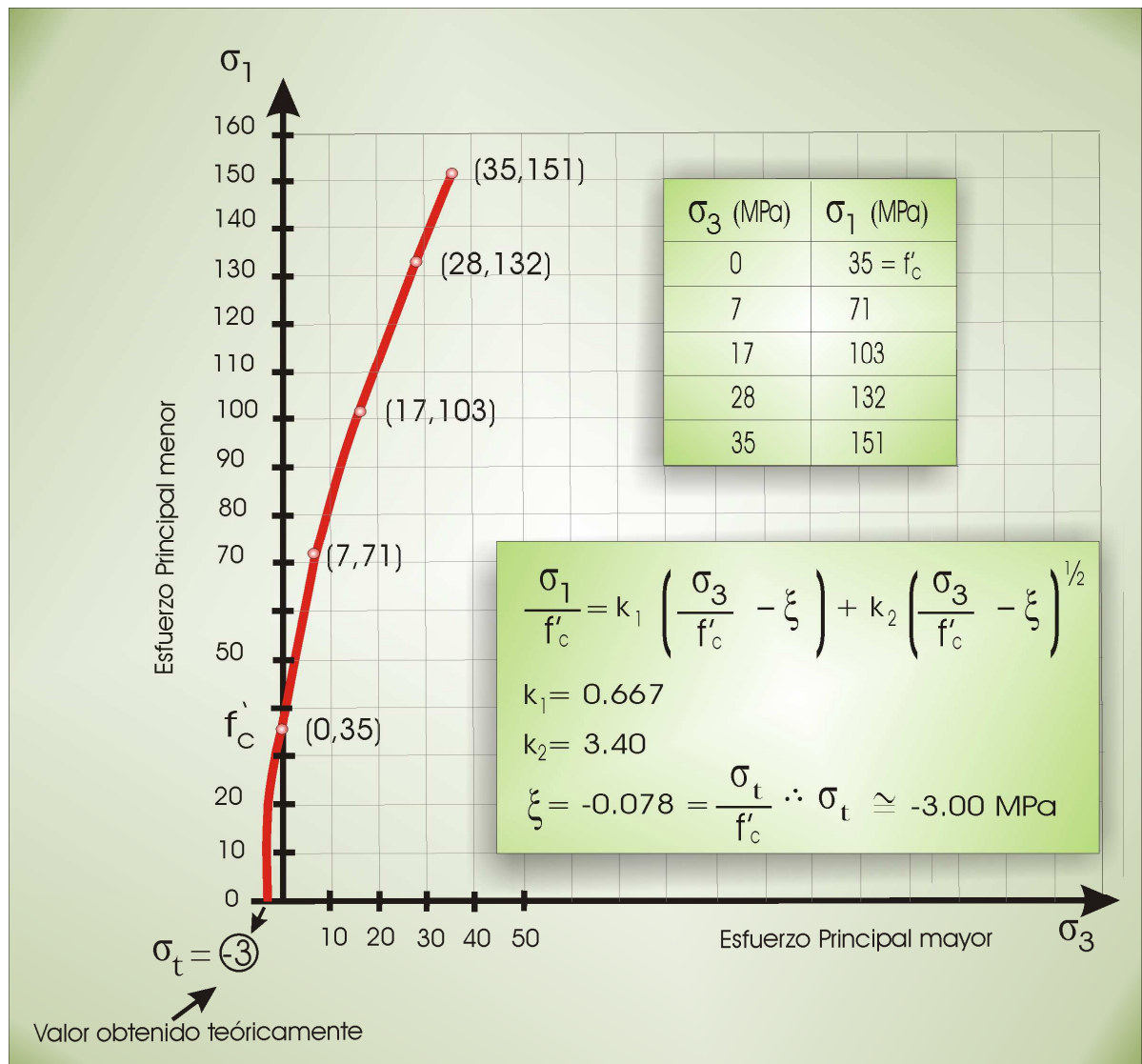


Figura 18. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en este estudio empleando los datos experimentales de Aire (2002).

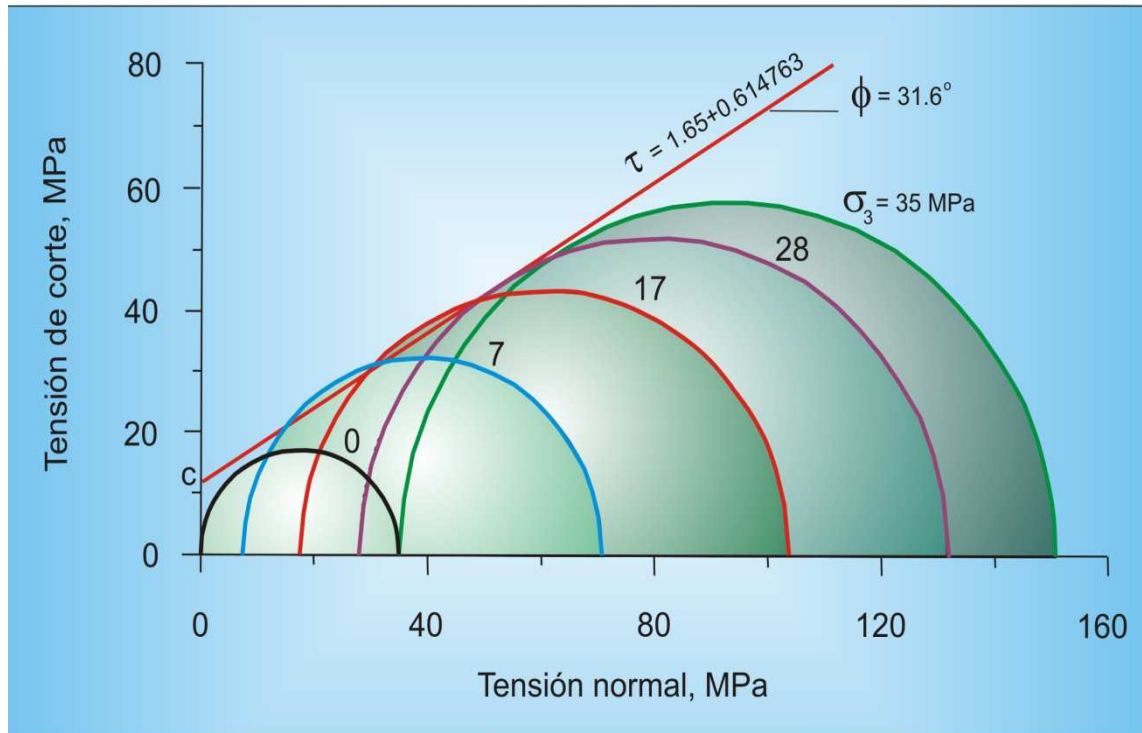


Figura 19. Envolvente lineal obtenida por Aire (2002) en sus estudios experimentales del hormigón confinado sometido a compresión.

Finalmente, considerando las constantes $k_1=0,67$, $k_2=3,40$, $\xi=-0,0778$, y aplicando las ecuaciones (86), (92) y (97) se obtiene:

$$\left[(\bar{\sigma}_n)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi}}{2\sqrt{\xi} \cdot (1+k_1) + k_2} = \frac{2\sqrt{0,078}}{2\sqrt{0,078} \cdot (1+0,67) + 3,40} = 0,129$$

$$\left[(\sin \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] = \left(\frac{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1-1) + k_2}{2\sqrt{-\xi} \cdot (k_1+1) + k_2} \right) = \left(\frac{2\sqrt{0,078}(0,67-1) + 3,40}{2\sqrt{0,078}(0,67+1) + 3,40} \right) = 0,7424$$

$$\beta = 47,94^\circ$$

$k_4 = -1,863$ (constante de integración).

En estas condiciones, al utilizar la ecuación (69) para diferentes valores de σ_n , se determina el correspondiente ángulo β . También puede aplicarse el caso contrario, es decir, dando valores de $\beta=0_i$ se calcula la tensión normal.

Finalmente, para cada valor de σ_n junto con el respectivo ángulo β , se determina la resistencia al corte τ_α , y se construye la envolvente o curva de resistencia intrínseca representada por la ecuación (55), es decir:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi\right) \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \cdot \tan\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\left[\tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^2}, \quad \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)$$

1.12.1. Determinación de la pendiente promedio aplicando el nuevo criterio de rotura a través de las pruebas de resistencia realizadas por Aire (2002)

En la sección 1.4 se determinó que la pendiente de la curva que vincula a la tensión $\sigma_1=f(\sigma_3)$ está representada por la ecuación:

$$\left(\frac{\partial \overline{\sigma_1}}{\partial \overline{\sigma_3}}\right) = \tan^2\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\overline{\sigma_3} - \xi}} \quad (110)$$

Siendo,

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{\partial \overline{\sigma_1}}{\partial \overline{\sigma_3}}\right), \quad \overline{\sigma_1} = \frac{\sigma_1}{f_c}, \quad \overline{\sigma_3} = \frac{\sigma_3}{f_c}$$

Seguidamente se determina el valor medio de la referida pendiente, considerando a través de la Tabla 14 los siguientes límites de integración:

$$\overline{\sigma_3} = \frac{\sigma_3}{f_c} = 0 \quad \overline{\sigma_3} = \frac{\sigma_3}{f_c} = 1$$

Como se sabe el valor medio de una función ⁹ $y_m = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$, $a \leq x \leq b$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{(1-0)} \int_{\bar{\sigma}_3=0}^{\bar{\sigma}_3=1} \left(k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\sigma_3 - \xi}} \right) d\bar{\sigma}_3 \quad (111)$$

$$\xi = \frac{\sigma_t}{f_c'} = -0,0778 \quad \therefore \quad \frac{f_c'}{\sigma_t} = |12,85|$$

Al integrar se obtiene:

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \right]_{\text{valor medio}} = k_1 + k_2 \left[\sqrt{\sigma_3 - \xi} \right]_0^1$$

$$k_1 = 0,67 \text{ y } k_2 = 3,40$$

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \right]_{\text{valor medio}} = 0,67 + 3,40(1,04 - 0,28) = 3,25 \quad (112)$$

El próximo paso, es determinar la pendiente aplicando el criterio lineal y comparar resultados. Al aplicar el criterio lineal con los datos indicados en la Tabla 14a, se obtiene mediante el ajuste por mínimos cuadrados:

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_c'} \right) = 3,44 \left(\frac{\sigma_3}{f_c'} \right) + 1 \quad , R^2 = 0,973.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta es

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} \right) = \tan^2 (45^\circ + \phi/2) = 3,44 \quad \therefore \phi = 33,34^\circ \quad ; \quad (\beta = \phi)$$

⁹Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica, Thomas (1966) , Editorial Aguilar, pp 234-236

Obsérvese que la pendiente promedio aplicando el nuevo criterio de rotura corresponde a 3,25, es decir, ligeramente menor al compararse con el criterio lineal.

En estas condiciones, el valor del ángulo de fricción interna es:

$$\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \right]_{\text{valor medio}} = 3,25 \quad \therefore \beta = \phi = 31,97^\circ \approx 32^\circ$$

1.12.2. Comentarios finales

Un aspecto importante que se desea destacar, es la diferencia en el tamaño de las probetas de hormigón ensayadas por Torres [11] y por Aire [13]. El primero en mencionar utilizó probetas cilíndricas de 5 cm de diámetro por 10 cm de altura, mientras que Aire [13] llevó a cabo las pruebas de compresión con muestras cilíndricas estándar de 15 cm de diámetro por 30 cm de altura.

Por otra parte, las pruebas y estudios experimentales han demostrado extensamente que la resistencia del hormigón o de la roca varía con el volumen de la muestra.

Es decir, la resistencia disminuye al aumentar el volumen, por cuanto un incremento en el tamaño de la muestra indica que mayor es la probabilidad que existan microgrietas.

Además, gran parte de la rotura del material dependerá de la distribución, número, tamaño de la microfisura (defectos estructurales), así como los cambios de energía asociados con la extensión de las fisuras. Todos estos aspectos mencionados tendrán una influencia importante en la fractura de la muestra ensayada.

Un caso de interés, corresponde al ensayo de compresión simple que relaciona la resistencia de la muestra con su esbeltez. Obert y Duvall¹⁰ en el clásico y bien conocido libro de mecánica de rocas y diseño de estructuras han establecido la siguiente ecuación a través de sus experiencias en el U.S Bureau of Mines.

¹⁰ Obert, L y Duvall W (1967) , “Rock Mechanics and the Design of Structures in Rock”, John Wiley & Sons, Inc., 650 p

$$C_o = \frac{C_p}{\left(0,778 + 0,222 \frac{D}{L}\right)} \quad (113)$$

Donde,

C_o = resistencia de la probeta de roca con longitud diferente al diámetro, $2 > (L/D) > 1/3$

C_p = resistencia de la probeta de roca con longitud igual al diámetro ($D/L=1$)

D = diámetro de la probeta

L = longitud (altura) de la probeta

Dicha ecuación, aparece en el Reporte de Investigación "Standardized Tests for Determining the Physical Properties of Mines Rock" por Obert.L, Windes .L y W. Duvall del referido Bureau, No. 3891 (1946).

Además, también es utilizada para obtener aproximadamente la resistencia a la compresión en pilares¹¹ (rocas elásticas).

Adicionalmente, Hoek y Brown¹¹ proponen una simple ecuación para determinar la resistencia a compresión uniaxial σ_{cd} en función del diámetro d (mm) de la probeta, para diámetros comprendidos entre 10 y 200 mm.

Siendo: $\sigma_{cd} = \sigma_{c50} \left(\frac{50}{d} \right)^{0,18}$

σ_{c50} es la resistencia a compresión uniaxial de una probeta de roca de 50 mm de diámetro.

Cabe destacar, que existen expresiones como la indicada en (113) las cuales consideran el efecto *Altura /Diámetro* de la probeta para determinar la resistencia a compresión uniaxial del hormigón.

Sin embargo, al igual que en los ensayos de roca, en la mayoría de los casos no reflejan el efecto de la forma de la sección transversal de la muestra. Por lo tanto, es fundamental corregir dicha relación teniendo en cuenta un factor de forma.

¹¹ Hoek, E y Brown. E, (1997). "Practical Stimates of Rock Mass Strength", International Journal of Rock mechanics and Mining Science, Vol.34, N° 8, pp 1165-1186

I.13. COMPARACIÓN DE RESULTADOS APLICANDO DIFERENTES CRITERIOS DE ROTURA A TRAVÉS DE LOS ESTUDIOS EXPERIMENTALES REALIZADOS POR TORRES [11]

Esta sección se fundamenta en comparar los diversos criterios de rotura con los valores de resistencia obtenidos por Torres [11] en 350 probetas de hormigón. Cincuenta y cinco de las muestras ensayadas corresponden a las pruebas triaxiales ($\sigma_2=\sigma_3$), en muestras cilíndricas de 5 cm de diámetro y 10 cm de altura.

Las restantes probetas se fabricaron variando la relación ancho/altura y tamaño. Adicionalmente, Torres [11] llevó a cabo pruebas de resistencia a la compresión simple en probetas tomadas como referencia en cilindros con relación altura /ancho de 2:1, de diámetro $\phi = 15$ cm y altura $H= 30$ cm. La resistencia media de los treinta cilindros de hormigón ensayados resultó ser de $f'_c=26,88$ MPa, con una desviación estándar $\sigma_{f'_c}=0,96$ MPa

En la Tabla 15 se anexan los valores obtenidos para los diferentes conjuntos de valores de las tensiones principales y se comparan con los resultados del criterio de rotura propuesto por el autor de esta investigación, conjuntamente con el de Hoek y Brown, Murrell-Bieniawski y Mohr-Coulomb. Cabe destacar que los parámetros involucrados en los criterios de rotura previamente mencionados se han determinado mediante la técnica de ajuste por mínimos cuadrados empleando la hoja de cálculo Excel.

La Tabla 16 indica los valores de la tensión principal mayor σ_1 para diferentes confinamientos expresados como una fracción de f'_c , es decir: σ_1 / f'_c

Por otra parte, considerando la importancia del tema investigado sobre la resistencia al corte o cizallamiento de la roca, en el Apéndice C, se describen los criterios de rotura más utilizados en el campo de la mecánica de las rocas.

Tabla 15. Comparación de los resultados entre varios criterios de rotura

Comparación de los resultados entre los diferentes criterios de rotura y los valores de los ensayos de laboratorio								
	Resultados de los ensayos de laboratorio				VALORES DEL ESFUERZO PRINCIPAL MAYOR σ_1 en (MPa)			
	Valores en (MPa)		Valores adimensionales		Curva	Curva	Curva	Curva
					Ajuste Ucar	Ajuste H&B	Ajuste MB	Ajuste Lineal
f'_c (MPa)	σ_3	σ_1	σ_3/f'_c	σ_1/f'_c	$(\sigma_1)_{Ucar}$	$(\sigma_1)_{HB}$	$(\sigma_1)_{MB}$	$(\sigma_1)_{Lineal}$
33,00	-3,50	0,00	-0,11	0,00	0,00	13,12	*	22,01
	0,00	33,00	0,00	1,00	33,00	33,00	33,00	33,00
σ_t (MPa)	2,80	46,69	0,08	1,41	45,41	44,49	46,84	41,78
-3,50	3,85	53,90	0,12	1,63	49,43	48,37	50,58	45,08
	5,59	57,89	0,17	1,75	55,66	54,46	56,28	50,57
ξ	7,00	63,66	0,21	1,93	60,32	59,10	60,54	54,98
-0,106060606	8,39	65,30	0,25	1,98	64,71	63,51	64,55	59,35
k_1	9,79	69,67	0,30	2,11	68,92	67,78	68,42	63,74
0,712	11,19	74,61	0,34	2,26	72,96	71,91	72,15	68,13
k_2	13,99	79,45	0,42	2,41	80,65	79,84	79,28	76,92
2,839	15,39	85,82	0,47	2,60	84,32	83,66	82,71	81,31
	16,78	86,33	0,51	2,62	87,89	87,40	86,06	85,70
m	17,48	87,09	0,53	2,64	89,65	89,24	87,71	87,90
7,037	18,18	89,13	0,55	2,70	91,38	91,06	89,35	90,09
	19,58	97,17	0,59	2,94	94,78	94,65	92,57	94,48
s	20,98	98,29	0,64	2,98	98,12	98,18	95,73	98,87
1	22,38	100,84	0,68	3,06	101,39	101,66	98,84	103,27
	23,78	103,05	0,72	3,12	104,60	105,08	101,90	107,66
	25,18	108,89	0,76	3,30	107,75	108,45	104,92	112,05
	26,57	110,77	0,81	3,36	110,85	111,78	107,90	116,44
	27,97	113,57	0,85	3,44	113,90	115,06	110,84	120,83

* Este criterio no acepta tensiones normales en la rama negativa (esfuerzos de tracción). Por lo tanto es una limitante

LEYENDA

$f'_c =$	Resistencia a la compresion simple del concreto en (MPa)		
$\sigma_t =$	Resistencia a la tracción del concreto en (MPa)		
$\xi = \sigma_t / f'_c$	$m, s =$ Parámetros del criterio de Hoek Y Brown		
$k_1 =$	Constante	$\sigma_1 = k_1 \left(\sigma_3 - \sigma_t \right) + k_2 \sqrt{f'_c} \left(\sigma_3 - \sigma_t \right)^{1/2}$	
$k_2 =$	Constante		
$(\sigma_1)_{Ucar}$	Valores de (σ_1) correspondientes al criterio de rotura de Ucar		
$(\sigma_1)_{HB}$	Valores de (σ_1) correspondientes al criterio de rotura de Hoek y Brown		
$(\sigma_1)_{MB}$	Valores de (σ_1) correspondientes al criterio de rotura de Murrell- Bieniawski		
$(\sigma_1)_{lineal}$	Valores de (σ_1) correspondientes al criterio de rotura lineal		

Tabla 16. Comparación de los resultados entre diferentes criterios de rotura.

Comparación de los resultados entre los diferentes criterios de rotura y los valores de los ensayos de laboratorio								
	Resultados de los ensayos de laboratorio				Curva		Curva	
	Valores en Mpa		Valores adimensionales		Ajuste Ucar	Ajuste H&B	Ajuste M&B	Ajuste Lineal
f'_c (MPa)	σ_3	σ_1	σ_3/f'_c	σ_1/f'_c	$(\sigma_1/f'_c)_{Ucar}$	$(\sigma_1/f'_c)_{HB}$	$(\sigma_1/f'_c)_{MB}$	$(\sigma_1/f'_c)_{Lineal}$
33,00	-3,50	0,00	-0,11	0,00	0,00	0,40	*	0,67
	0,00	33,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
σ_t (MPa)	2,80	46,69	0,08	1,41	1,38	1,35	1,42	1,27
-3,50	3,85	53,90	0,12	1,63	1,50	1,47	1,53	1,37
	5,59	57,89	0,17	1,75	1,69	1,65	1,71	1,53
ξ	7,00	63,66	0,21	1,93	1,83	1,79	1,83	1,67
-0,10606061	8,39	65,30	0,25	1,98	1,96	1,92	1,96	1,80
k_1	9,79	69,67	0,30	2,11	2,09	2,05	2,07	1,93
0,712	11,19	74,61	0,34	2,26	2,21	2,18	2,19	2,06
k_2	13,99	79,45	0,42	2,41	2,44	2,42	2,40	2,33
2,839	15,39	85,82	0,47	2,60	2,56	2,54	2,51	2,46
	16,78	86,33	0,51	2,62	2,66	2,65	2,61	2,60
m	17,48	87,09	0,53	2,64	2,72	2,70	2,66	2,66
7,037	18,18	89,13	0,55	2,70	2,77	2,76	2,71	2,73
	19,58	97,17	0,59	2,94	2,87	2,87	2,81	2,86
s	20,98	98,29	0,64	2,98	2,97	2,98	2,90	3,00
1	22,38	100,84	0,68	3,06	3,07	3,08	3,00	3,13
	23,78	103,05	0,72	3,12	3,17	3,18	3,09	3,26
	25,18	108,89	0,76	3,30	3,27	3,29	3,18	3,40
	26,57	110,77	0,81	3,36	3,36	3,39	3,27	3,53
	27,97	113,57	0,85	3,44	3,45	3,49	3,36	3,66

*Este criterio no acepta tensiones normales en la rama negativa (esfuerzos de tracción). Por lo tanto es una limitante

LEYENDA

$f'_c =$	Resistencia a la compresion simple del concreto en MPa		
$\sigma_t =$	Resistencia a la tracción del concreto en MPa		
$\xi = \sigma_t / f'_c$	m, s = Parámetros del criterio de Hoek Y Brown		
$k_1 =$	Constante	$\left(\frac{\sigma_1}{f'_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{f'_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{f'_c} - \xi \right)^{1/2}$	
$k_2 =$	Constante		
$(\sigma_1 / f'_c)_{Ucar}$	Valores de (σ_1 / f'_c) correspondientes al criterio de rotura de Ucar		
$(\sigma_1 / f'_c)_{HB}$	Valores de (σ_1 / f'_c) correspondientes al criterio de rotura de Hoek y Brown		
$(\sigma_1 / f'_c)_{MB}$	Valores de (σ_1 / f'_c) correspondientes al criterio de rotura de Murrell-Bieniawski		
$(\sigma_1 / f'_c)_{lineal}$	Valores de (σ_1 / f'_c) correspondientes al criterio de rotura lineal		

I.13.1. Comentarios relacionados con los resultados obtenidos

- **Criterio lineal de Mohr-Coulomb¹²**

Como se sabe, al ser la relación entre los esfuerzos principales lineal, la resistencia al corte es también lineal, obteniéndose la bien conocida envolvente de rotura de Mohr-Coulomb, representada por la ecuación:

$$\tau_{\alpha} = C + \sigma_n \cdot \tan \phi$$

Por otra parte, la ecuación que vincula $\sigma_1 = f(\sigma_3)$ es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1}{f_c} &= 1 + \left(\frac{\sigma_3}{f_c} \right) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \\ \text{Que también equivale a escribir :} \\ \sigma_1 &= \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) + 2C \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Siendo C y ϕ los parámetros resistentes que corresponden a la cohesión y el ángulo de fricción interna del material respectivamente; y por otra parte, f_c es la resistencia a compresión simple del hormigón.

$$\left. \begin{aligned} N_{\phi} &= \tan^2(45^\circ + \phi/2) = \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \\ N_{\phi}^{1/2} &= \tan(45^\circ + \phi/2) = \left(\frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right) \end{aligned} \right\}$$

En estas condiciones a través de la Tabla 16 y aplicando la técnica de mínimos cuadrados se obtiene que $N_{\phi}=3,14$. Siendo por lo tanto el ángulo

¹² En el apéndice (F), se deducen diferentes expresiones que relacionan los parámetros resistentes al aplicar el criterio de Mohr- Coulomb.

de fricción interna del hormigón $\phi = 31,12^\circ$. Adicionalmente al aplicar (114) y teniendo en cuenta que la tensión $\sigma_3 = 0$, resulta:

$$f'_c = 2 \cdot C \cdot \tan(45^\circ + \phi/2) \quad (115)$$

A través de esa última ecuación, el valor de la cohesión del hormigón es:

$$C = \frac{f'_c}{2 \cdot \tan(45^\circ + \phi/2)} = \frac{33,00 \text{ MPa}}{2 \sqrt{3,14}} = 9,13 \text{ MPa}$$

Por otro lado, cabe señalar que Chen [14] en su libro de *Plasticity in Reinforced Concrete*, indica valores del ángulo de fricción $\phi \approx 37^\circ$ y $C \approx \frac{f'_c}{4} \Rightarrow C \approx \frac{33,00 \text{ MPa}}{4} = 8,25 \text{ MPa}$.

Por otra parte, a través de la figura 20 se observa que las dos ecuaciones indicadas muestran resultados muy parecidos para valores de $\sigma_3 / f'_c \leq 0,60$.

También, a través de la Fig. 20, puede apreciarse que la ecuación lineal mencionada por Wang Chuan-zhi et al [15] de las investigaciones realizadas por Richart, el parámetro $N_\phi \approx 4,10$. Utilizando dicho valor se obtiene un ángulo $\phi \approx 37^\circ$, es decir coincide con las experiencias de Chen [14].

Adicionalmente, se aprecia que en los parámetros obtenidos por Torres [11] el ángulo de fricción interna es unos seis grados menor y la resistencia cohesiva es un 12% mayor. Sin embargo, al aplicar el criterio original empírico de Hoek y Brown, las constantes obtenidas son $m = 7$ y $s = 1$, las cuales coinciden con una roca intacta del tipo caliza. Como se sabe, esta roca es utilizada frecuentemente como árido en la elaboración de hormigón, y por lo tanto dichos parámetros son buenos indicadores de los resultados obtenidos. Por supuesto, para llevar a cabo una comparación detallada de los parámetros de corte C y ϕ del hormigón, es necesario conocer en detalle, los ensayos granulométricos de los áridos, el diseño de la mezcla, así como la elaboración de las probetas, su normativa y otros factores que influyen en la resistencia del hormigón.

En este sentido, debe indicarse nuevamente las investigaciones realizadas por Aire [13] en su tesis doctoral sobre el comportamiento del hormigón confinado sometido a compresión.

Dicho investigador ensayó probetas cilíndricas de hormigón de 150x300 mm a diferentes niveles de confinamiento ($\sigma_2=\sigma_3$) en dos casos específicos con resistencias a la compresión uniaxial de 35 MPa y de 68 MPa (hormigón de alta resistencia).

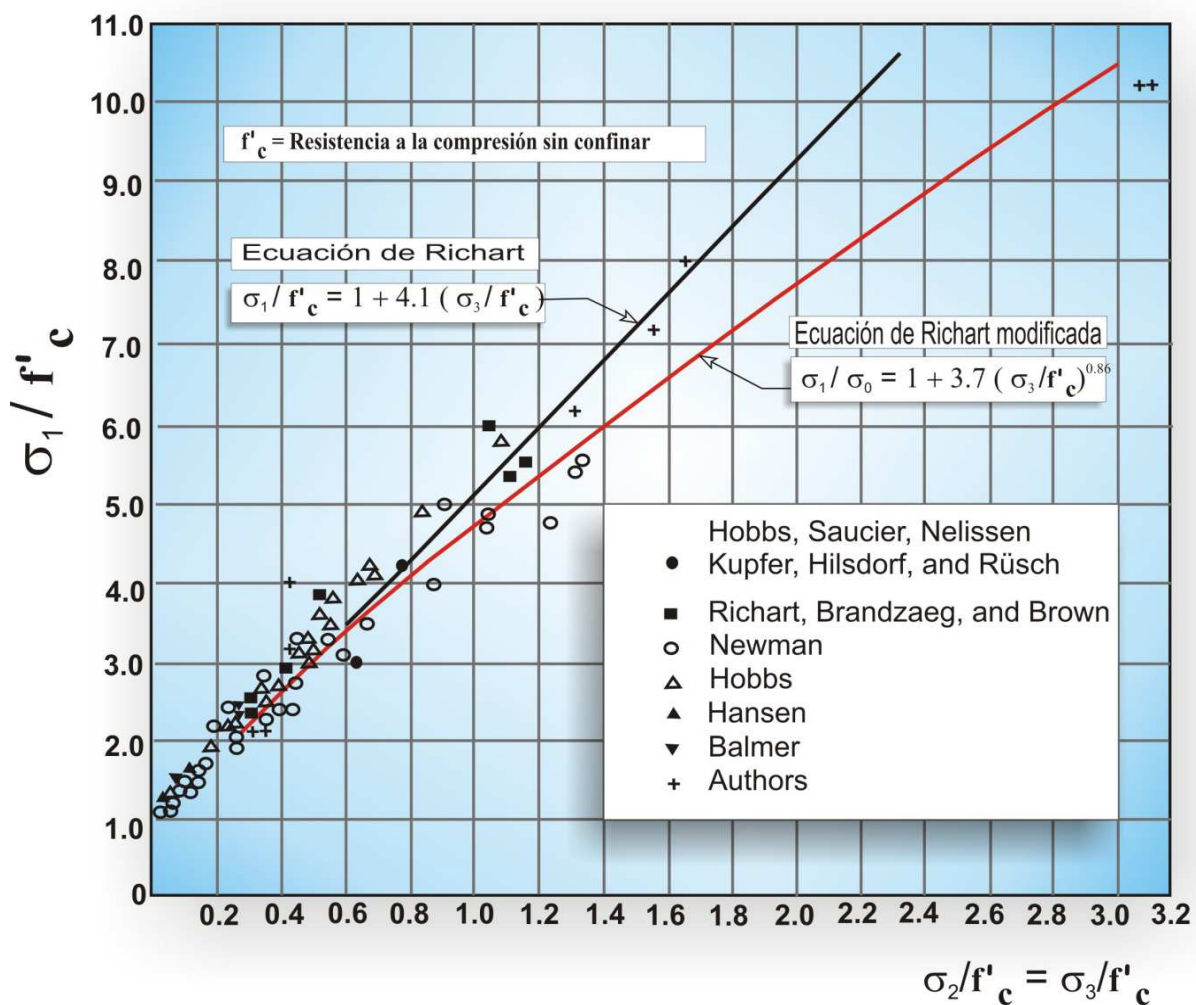


Figura 20. Comparación de los ensayos de compresión triaxial en probetas de hormigón considerando diferentes autores según Wang Chuan- zhi et al [15].

En la Tabla 17 se presentan los resultados de dicho investigador, indicándose los parámetros de corte C y ϕ de su estudio experimental.

Cabe señalar que la probeta de hormigón con una resistencia a compresión uniaxial $f'_c = 35$ MPa tiene un ángulo de fricción interna que coincide con el obtenido por Torres [11] pero la cohesión es un 27% mayor. Por otra parte, de acuerdo a los estudios experimentales realizados por Aire (2002), se aprecia que el hormigón de alta resistencia $f'_c = 68$ MPa duplica la cohesión al compararse con el hormigón de 35 MPa, pero el ángulo de fricción interna disminuye en unos cinco grados con respecto al hormigón de menor resistencia. Por otro lado, al tomar en consideración los parámetros de corte $C = 9,13$ MPa y $\phi = 31,12^\circ$ obtenidos por Torres [11] para un hormigón con resistencia $f'_c = 33$ MPa se asemejan a los valores experimentales obtenidos por Aire [13] para un hormigón con una resistencia a compresión simple $f'_c = 35$ MPa.

Tabla 17. Parámetros del Criterio de Mohr-Coulomb, según Aire [13].

Resistencia a Compresión Simple	C (MPa)	Ángulo de Fricción ϕ	Coefficiente de Fricción $\tan\phi$
$f'_c = 35$ MPa	11,60	31,50	0,614
$f'_c = 68$ MPa	22,60	29,10	0,557

• **Criterio de Murrell y modificado por Bieniawski ($K=075$)**

Este criterio propuesto por Murrell [16] y luego modificado por Bieniawski [17] no acepta tensiones normales en la rama negativa (esfuerzos de tracción), tal como se puede apreciar a través de la

$$\text{ecuación: } \left(\frac{\sigma_1}{f'_c} \right) = A \left(\frac{\sigma_3}{f'_c} \right)^{0,75} + 1$$

Los valores recomendados por Bieniawski [17] para diferentes rocas son los siguientes:

Tabla 18. Según Bieniawski [16].

$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 + A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K \quad \therefore \quad K = 0,75$	
Tipo de roca intacta	A
Norita	5,0
Cuarcita	4,5
Limolita	4,0
Lodolita	3,0
Mayoría de las rocas	3,5

Debe señalarse, que aplicando dicho criterio Úcar [18] determinó la envolvente de rotura para $K=0,75$ (Véase Apéndice D)

Para el caso particular en el cual el exponente $K=1$, la relación entre los esfuerzos es lineal y la constante $A = N_\phi = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$.

Por otra parte, el referido criterio está limitado para el caso de tensiones de tracción, y por lo tanto se reduce su aplicación. Obsérvese que en la Tablas 15 y 16 para el caso de que $\sigma_t = -3,50$ MPa no se registra ningún valor, ya que todos los valores de las tensiones deben ser de compresión.

• **Criterio de rotura de Hoek y Brown (HB)**

A través de la Tabla 15, se observa que el valor de $\sigma_1 = 13,12$ MPa corresponde cuando la resistencia a la tracción $\sigma_t = -3,50$ MPa. Lógicamente el valor de σ_1 debe ser cero para el caso particular en el cual $\sigma_3 = \sigma_t$.

Por tanto, el referido criterio de rotura no cumple con dicha condición. Con el objeto de conocer las razones por las cuales el esfuerzo principal mayor σ_1 no es cero, se aplicará la ecuación desarrollada por dichos investigadores para determinar la resistencia a la tracción σ_t a través de la ecuación:

$$\sigma_3 = \sigma_t = \frac{\sigma_c}{2} \cdot \left[m - \left(m^2 + 4 \cdot s \right)^{1/2} \right] \quad (116)$$

Por otra parte, los valores de (m) y (s) obtenidos mediante el ajuste de la curva aplicando la técnica de mínimos cuadrados en función de los 21 ensayos de (σ_1, σ_3) indicados en la Tablas 15 y 16, han dado como resultado que $m = 7$ y $s = 1$.

Con dichos parámetros al aplicar (116) resulta:

$$\sigma_3 = \sigma_t = \frac{33}{2} \cdot \left[7 - (49 + 4 \cdot 1)^{1/2} \right] = -4,62 \text{ MPa}$$

Es decir, esta resistencia no corresponde con el valor obtenido experimentalmente de $\sigma_t = -3,50 \text{ MPa}$.

Adicionalmente, se sabe que al aplicar el criterio de Hoek y Brown el parámetro (m) está definido aproximadamente por la relación:

$$m \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| = \left| \frac{f'_c}{\sigma_t} \right|$$

En estas condiciones, $m = f'_c / \sigma_t = (33 \text{ MPa} / 3,50 \text{ MPa}) \approx 9,4$.

Con dicho valor y $s = 1$, la resistencia a la tracción al aplicar (116) corresponde a una resistencia a la tracción de $\sigma_t = -3,50 \text{ MPa}$

Por otro lado, el parámetro $m = 7$, obtenido mediante el ajuste de la curva no coincide con el valor teórico de $m = 9,40$ al aplicar el mencionado criterio de rotura.

Sin embargo, es posible que esta discrepancia entre lo teórico y experimental en otros casos no se produzca.

Por supuesto, si se utiliza $m = 9,40$ en lugar de $m = 7$, los valores de σ_1 se alejan todavía más con relación a los obtenidos experimentalmente.

• **Criterio de rotura de Úcar**

Al examinar las constantes k_1 y k_2 de este nuevo criterio, se observa que la constante k_2 tiene una gran influencia sobre la curvatura y por ende en la variación del vector tangente al moverse sobre la curva.

Adicionalmente, si $k_2 \rightarrow 0$, la relación entre los esfuerzos principales es lineal.

Lo anterior indica que el radio de curvatura $\rho \rightarrow \infty$, y por lo tanto la constante $k_1 = N_\phi = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$ como se demuestra a continuación.

Al ser $k_2 = 0$, la ecuación (34) se transforma:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) \quad , \quad \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \quad (117)$$

Siendo,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= k_1 \cdot \sigma_c \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) = k_1 \sigma_3 - k_1 \sigma_c \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) \\ \sigma_1 &= k_1 (\sigma_3 - \sigma_t) \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Por otra parte, si $\sigma_1 = \sigma_c \rightarrow \sigma_3 = 0$, resultando:

$$\sigma_c = -k_1 \sigma_t \Rightarrow k_1 = -\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \quad \therefore \quad (\sigma_t \text{ negativo}) \quad (119)$$

Así, al emplear (117) se obtiene la conocida ecuación lineal:
 $\sigma_1 = k_1 \sigma_3 + \sigma_c$

Es decir:

$$k_1 = N_\phi = \tan^2(\pi/4 + \phi/2) = \left(\frac{1 + \sen\phi}{1 - \sen\phi}\right) \quad (120)$$

Por lo tanto, al ser $k_2 = 0$, la envolvente de rotura es lineal y el parámetro k_1 se vincula a dos propiedades fundamentales como son la resistencia a compresión y tracción simple de la roca o el hormigón.

Siendo, además:

$$\left(\frac{1}{k_1}\right) = -\xi = -\frac{\sigma_t}{f_c} = -\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \quad (121)$$

Cabe señalar, como se podrá apreciar en la próxima sección, que este criterio presenta el menor error estándar al compararse con el Murrell – Bieniawski, Hoek y Brown y la relación lineal entre σ_1 y σ_3 .

1.13.2. Determinación del error estándar

A través de los diferentes criterios de rotura investigados se ha determinado el error estándar del valor estimado.

Dicho valor es simplemente la desviación estándar de los valores observados de σ_1 (valor experimental) alrededor de la línea de regresión estimada, la cual se utiliza frecuentemente como una medida resumen de la **bondad de ajuste** de dicha línea. En resumen, el **Error Estándar** no es otra cosa que la desviación estándar de la distribución muestral del estimador.

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum u_i^2}{(n-k)}} \quad (122)$$

$$u_i = (\sigma_1)_{exp} - (\sigma_1)_{estimado} \quad (123)$$

u_i es el residuo, es decir la diferencia entre el valor experimental y el estimado.

$$\sum u_i^2 = \text{suma de los valores residuales al cuadrado} \quad (124)$$

$(n-k)$, se conoce como el número de grados de libertad.

El término grados de libertad, significa el número total de observaciones (n) en la muestra menos el número de restricciones independientes (k), donde:
 k = Número de parámetros o constantes a determinar.

En el caso, correspondiente a los criterios investigado $k=2$, excepto en la ecuación de Murrell-Bieniawski, en la cual $k=1$

Tabla 19. Desviación estándar para los diferentes criterios.

Criterio de Rotura	Desviación Estándar σ_1 (MPa)
Úcar	1,9
Hoek y Brown	3,86
Murrell-Bieniawski	2,30
Lineal	7,20

Se observa de acuerdo a Tabla 19 que el menor error estándar corresponde al criterio de rotura empírico propuesto por Úcar. Estos resultados se basan en el estudio experimental realizado por Torres [11] en probetas de hormigón sometidas a compresión triaxial ($\sigma_3=\sigma_2$). Los valores para diferentes intervalos de tensiones (σ_3, σ_1) se indican en las Tablas 15 y 16.

Resumiendo, se tiene:

- **Criterio de Úcar**

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_c'} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{f_c'} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{f_c'} - \xi \right)^{1/2}$$

Constantes obtenidas: $k_1 = 0,712$, $k_2 = 2,839$

$$f_c' = 33 \text{ MPa}, \sigma_t = -3,50 \text{ MPa}$$

$$\xi = \left(\frac{\sigma_t}{f_c'} \right) = -0,1061$$

Error Estándar = Se = 1,90 MPa

- **Criterio original de Hoek y Brown**

$$\sigma_1 = \sigma_3 + f'_c \left[m \cdot \frac{\sigma_3}{f'_c} + s \right]^{1/2}, MPa$$

Constantes obtenidas: $m = 7,037$, $s = 1$

Error Estándar = 3,86 MPa

- **Criterio de Murrell y modificado por Bieniawski ($K=0.75$)**

$$\sigma_1 = A \cdot f'_c \left(\frac{\sigma_3}{f'_c} \right)^{0,75} + f'_c, MPa$$

Constante obtenida: $A = 2,67$

Desviación Estándar = 2,37 MPa

- **Criterio lineal**

$$\sigma_1 = N_\phi \cdot \sigma_3 + f'_c$$

Constante obtenida: $N_\phi = 3,14$

Error Estándar = Se = 7,02 MPa

CAPÍTULO 2 ECUACIÓN DE LA CURVA PLANA DE ROTURA EN MACIZOS ROCOSOS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe una metodología práctica y efectiva, la cual permite calcular las tensiones σ_1 , σ_n y τ_α considerando el estado de fractura y meteorización de la roca utilizando las bien conocidas clasificaciones geomecánicas.

Cabe destacar que al considerar este apasionante y complejo tema concerniente con la resistencia de macizos rocosos (conjunto de matriz rocosa y discontinuidades), se ha utilizado como base de cálculo el criterio de rotura propuesto por Úcar [10] junto con el índice de calidad *Rock Masses Rating* (RMR) de Bieniawski [2].

Sin embargo, puede emplearse también el Sistema Q de Barton [3], el Índice de Resistencia Geológica GSI (*Geological Strength Index*-GSI de Hoek y Brown [21] o el RMI de Palström [5].

Estos índices pueden relacionarse con el RMR a través de las siguientes ecuaciones:

$$RMR \approx GSI \quad (125)$$

$$RMR = 15 \log Q + 50 \quad (126)$$

$$RMI \approx \sigma_{cm} \quad (\text{Véase ecuación 129, en la cual } \sigma_{cm} = f(\sigma_c, RMR) \quad (127)$$

El lector puede visitar la página: *Comparing the RMR, Q and RMI Classifications Systems. Part2: Correlations of three Systems*, por A. Palström, http://www.rockmass.net/files/correlation_Q-RMR-RMI-2.pdf.

Como se sabe la presencia de discontinuidades le otorga al material rocoso un comportamiento no continuo, además de su naturaleza heterogénea relacionada con la estructura mineral. La orientación de los planos de discontinuidad, su frecuencia, rugosidad, abertura, persistencia, junto con el grado de meteorización, filtraciones y presiones hidráulicas entre otros factores, trae como consecuencia la difícil tarea de poder determinar con un buen rango de aproximación la resistencia al corte de la roca. Igualmente, su resistencia a tracción (muy baja o nula en presencia de discontinuidades) y a compresión.

En definitiva, el conocimiento combinado de las propiedades mecánicas e hidráulicas, y la incorporación de las clasificaciones geomecánicas permitirá entender mejor los diferentes niveles resistencia de los macizos rocosos.

2.2. CÁLCULO DE LAS CONSTANTES k_1 , k_2 y k_4 TENIENDO EN CUENTA EL ÍNDICE DE CALIDAD DE LA ROCA

Tomando como base la ecuación (28) se propone una ecuación de la forma:

$$\sigma_1 = k_1 (\sigma_3 - \sigma_{tm}) + k_2 \sqrt{(\sigma_3 - \sigma_{tm})} \quad (128)$$

Donde σ_{tm} representa la resistencia a tracción de la masa rocosa, y es una fracción de la resistencia a tracción de la roca intacta (matriz rocosa) σ_t .

En general, es práctica común determinar la resistencia de la masa rocosa a compresión sin confinar σ_{cm} y a tracción σ_{tm} como una fracción de su valor intacto utilizando las siguientes expresiones:

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \approx \exp\left(\frac{RMR-100}{a_c}\right) \quad (129)$$

σ_c = Resistencia a compresión simple o sin confinar de la roca intacta.

$$\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_t} = \exp\left(\frac{RMR-100}{b_t}\right) \quad (130)$$

RMR= Índice de calidad de Bieniawski.

a_c, b_t = Parámetros que varían de acuerdo al investigador.

$a_c = 18,75-25$

$b_t \approx 7,7-27$

Para mayor detalle se recomienda la lectura de los artículos de Aubertin et al [19] y Zhang[20].

Cabe destacar que el último autor en mencionarse ha preparado un gráfico comparativo de los valores de (σ_{cm} / σ_c) teniendo en cuenta las diferentes ecuaciones propuestas por reconocidos investigadores en función de los índices de RMR o GSI.

La Fig.21 muestra en detalle los valores de $(\sigma_{cm} / \sigma_c) = f(\text{RMR o GSI})$.

Por ejemplo Sheorey en su libro *Empirical Failure Criteria* [7] utiliza los siguientes valores:

$a_c = 20$ y $b_t = 27$ (Siendo el índice RMR_{76} . Para $\text{RMR}_{76} > 18$, $\text{GSI} = \text{RMR}_{76}$).

Dividiendo la ecuación (128) por σ_{cm} , resulta:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cm}} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{cm}} - \frac{\sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right) + \frac{k}{\sqrt{\sigma_{cm}}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right)} \quad (131)$$

Llamando:

$$k_2 = \frac{k}{\sqrt{\sigma_{cm}}} \quad (132)$$

La ecuación (131) se transforma,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{cm}} = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{cm}} - \frac{\sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right) + k_2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right)} \quad (133)$$

A través de (130) y (129), la relación $\xi_{\psi} = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right)$ puede representarse como sigue:

$$\xi_{\psi} = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right) = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \underbrace{\exp \left[\left(\frac{RMR-100}{b_t} \right) - \left(\frac{RMR-100}{a_c} \right) \right]}_{\psi(RMR)} \quad (134)$$

Por lo tanto, en forma reducida se tiene:

$$\xi_{\psi} = \xi \cdot \psi(RMR) = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \cdot \psi(RMR) \quad , \quad \xi_{\psi} = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_{cm}} \right) \quad (135)$$

$$\psi = \psi(RMR) = \exp \left[\left(\frac{RMR-100}{b_t} \right) - \left(\frac{RMR-100}{a_c} \right) \right] \quad (136)$$

Quedando finalmente,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cm}} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{cm}} - \xi_{\psi} \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{cm}} - \xi_{\psi} \right)^{1/2} \quad (137)$$

Lógicamente, si $RMR=100$ (roca intacta), se observa a través de (129), (136) y (135) que:

$$\sigma_{cm} = \sigma_c \quad , \quad \psi(RMR)=1 \quad , \quad \xi_{\psi} = \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)$$

Por lo tanto, en este caso en particular la ecuación (137) pasa a representar la condición de una roca intacta (matriz rocosa)

En base los estudios realizados por Hoek y Bray [1], [21] junto con Kalamaras y Bieniawski [22] Ramamurthy [4] Singh y Goel [23], Mehrotra

[24], Zhang [20] y Brady citado por Aubertin et al [19] entre otros, también ha sido posible establecer las siguientes ecuaciones aproximadas para σ_{cm} y σ_{tm} considerando las experiencias de los investigadores previamente mencionados en función de σ_c y RMR.

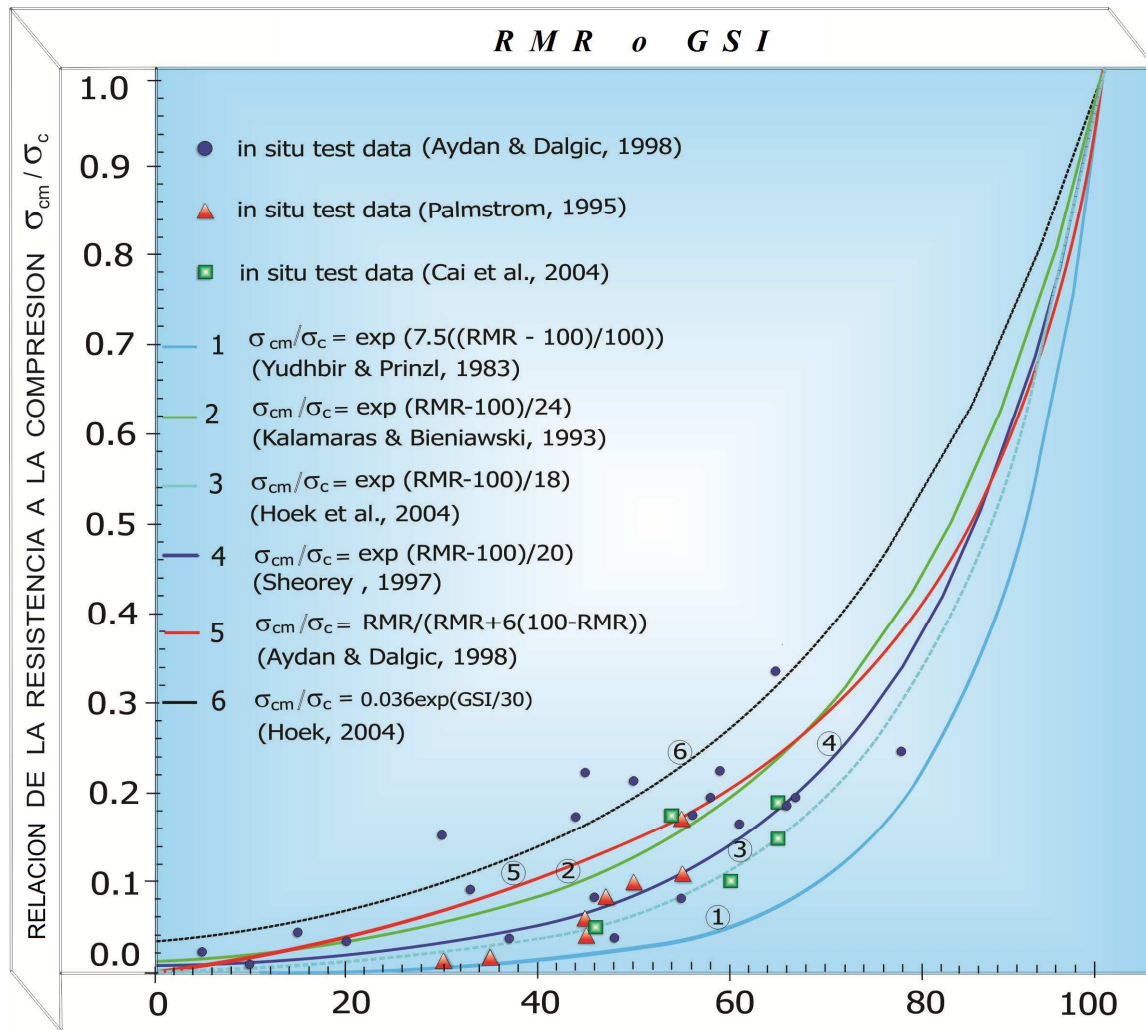


Figura 21. Variación de la resistencia a compresión sin confinar σ_{cm} de la masa rocosa en función de los índices RMR o GSI, según Zhang [20].

- **Resistencia a compresión simple de la masa rocosa**

$$\eta_m = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \right) \approx \exp \left(\frac{RMR-100}{a_c} \right) \Rightarrow \sigma_{cm} = \eta_m \cdot \sigma_c \quad (138)$$

Para efectos de diseño se recomienda utilizar valores de a_c comprendidos en el siguiente intervalo cerrado:

$$18,75 \leq a_c \leq 24$$

Siendo $a_c = 18,75$ (Ramamurthy), $a_c = 20$ (Sheorey), $a_c = 24$ (Kalamaras y Bieniawski).

- **Resistencia a tracción uniaxial de la masa rocosa**

En base a los investigadores previamente mencionados, se recomienda la siguiente expresión considerando $b_t \approx 14$

$$\left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) \approx \xi \cdot \exp \left(\frac{RMR-100}{14} \right), \quad \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \quad (139)$$

$$\xi_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) \approx \xi \cdot \exp \left(\frac{RMR-100}{14} \right) \quad (140)$$

Por otra parte, se observa que la ecuación (139) puede expresarse en la forma siguiente:

$$\left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_t} \right) \approx \exp \left(\frac{RMR-100}{14} \right) \quad (141)$$

Cabe destacar, la diferencia importante que existe en la relación $\left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_t} \right)$ al considerar los factores $b_t = 14$ y $b_t = 27$, este último recomendado por Sheorey [7].

Esta diferencia, sin lugar a dudas demuestra lo complejo de poder determinar con un buen grado de aproximación la resistencia en macizos rocosos. En este sentido, es fundamental llevar a cabo más pruebas experimentales, las cuales permita a través de futuras investigaciones aplicar técnicas estadísticas y de simulación, que ayuden a obtener a través de los datos muestrales los parámetros estadígrafos, tipo de distribución, y demás análisis estadísticos de las observaciones.

Finalmente, es más ventajoso expresar adimensionalmente la ecuación (128) en función de σ_c , es decir:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) + \frac{k}{\sqrt{\sigma_c}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)} \quad (142)$$

Por lo tanto, la constante K_2 se transforma:

$$k_2 = \left(\frac{k}{\sqrt{\sigma_c}} \right) \quad (143)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right)^{1/2} \quad (144)$$

En definitiva, para efectos de diseño se debe aplicar la ecuación (138) considerando $18,75 \leq a_c \leq 24$, junto con las expresiones (139) y (144), las cuales servirán de base fundamental para determinar la resistencia en macizos rocosos.

En estas condiciones es posible, hallar las respectivas constantes k_1 y k_2 , teniendo en cuenta como parámetros fundamentales:

$\xi_m = \xi \cdot \exp[(RMR-100)/b_t]$ y $\sigma_{cm} = \sigma_c \cdot \exp[(RMR-100)/a_c]$ siendo además $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$

Adicionalmente se recomienda utilizar $a_c = 18,75$ (Ramamurthy), $a_c = 20$ (Sheorey) y $a_c = 24$ (Kalamaras y Bieniawski) y posteriormente tomar el valor de a_c que mejor juzgue el ingeniero geotécnico. Por otra parte, se ha considerado dejar permanente en los cálculos el parámetro $b_t \approx 14$, aunque también puede variar según la experiencia del proyectista.

Como previamente se ha indicado, para el caso de la roca intacta la resistencia de la roca se determina en función del conocido parámetro ξ (ξ), definido por la razón $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$.

Adicionalmente, si se utiliza la ecuación (131) la cual está vinculada mediante la relación $(\sigma_{tm} / \sigma_{cm})$ el parámetro ξ debe ser substituido en todas las ecuaciones por el factor $\xi_\psi = (\sigma_{tm} / \sigma_{cm})$.

Igualmente, si la ecuación entre las tensiones principales está definida a través de (σ_{tm} / σ_c) el parámetro ξ debe ser remplazado en todas las ecuaciones por $\xi_m = (\sigma_{tm} / \sigma_c)$, tal como se indica en la ecuación (144), la cual corresponde a la ecuación final propuesta para determinar la resistencia en macizos rocosos.

Por otra parte, para el caso del ensayo de compresión simple se sabe que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 = 0, \overline{\sigma_3} &= \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) = 0, \sigma_1 = \sigma_{cm} \\ \overline{\sigma_1} &= \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \right) = \eta_m = \exp \left(\frac{RMR-100}{a_c} \right) \end{aligned} \right\}$$

Utilizando la ecuación (34) y substituyendo ξ por ξ_m se obtiene la nueva expresión:

$$\eta_m = k_1 (-\xi_m) + k_2 (-\xi_m)^{1/2} \Rightarrow k_2 = \frac{[\eta_m - k_1 (-\xi_m)]}{\sqrt{-\xi_m}} \quad (145)$$

Reemplazando ξ por ξ_m la ecuación (105) se transforma:

$$k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{-\xi_m}} = \tan\left(45^\circ + \arctan(k_1)\right) = \left(\frac{1+k_1}{1-k_1}\right) \quad (146)$$

Al substituir el valor de k_2 en (146), y realizando simplificaciones se obtiene finalmente:

$$k_1 = \frac{-\left(\eta_m + |\xi_m|\right) + \sqrt{\eta_m^2 + 6\eta_m \cdot |\xi_m| - 7\xi_m^2}}{2|\xi_m|} \quad (147)$$

Es importante resaltar, que una vez conocidos los parámetros k_1 y k_2 se determina la constante de integración k_4 a través de (97), teniendo en cuenta que ξ debe ser reemplazado por ξ_m , siendo: $\xi_m = \xi \exp\left(\frac{RMR-100}{14}\right)$. Además, en la referida ecuación debe considerarse $(\sigma_n)_{\sigma_3=0}$ y $(\sin\beta_1)_{\sigma_3=0}$, los cuales dependen también del índice de calidad de la roca. Lo anterior implica, que para la condición de **macizo rocoso** es necesario llevar a cabo los siguientes cambios cuando $\sigma_3=0$.

$$\begin{aligned} \sigma_3 = 0 &\rightarrow \sigma_1 = \sigma_{cm} \\ \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c}\right) &= \eta_m = \exp\left(\frac{RMR-100}{a_c}\right) \end{aligned} \quad (148)$$

Por lo tanto, la ecuación (87) se transforma:

$$(\bar{\sigma}_n)_{\sigma_3=0} = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c}\right) \cos^2 \alpha = \eta_m \left(\frac{1 - \sin\beta_1}{2}\right) \quad (149)$$

Siguiendo el mismo proceso, al reemplazar ξ_m por ξ en la ecuación (92) se obtiene:

$$\left[(\text{sen} \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1-1) + k_2}{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1+1) + k_2} \quad (150)$$

Al tener en cuenta esta última ecuación, la tensión normal $(\sigma_n)_{\sigma_3=0}$ indicada en (149) y expresada en función de ξ_m es la siguiente:

$$\left[(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right] = \eta_m \left(\frac{2\sqrt{-\xi_m}}{[2\sqrt{\xi_m} \cdot (1+k_1)] + k_2} \right) \quad (151)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, al substituir ξ por ξ_m en las ecuaciones (54) y (69), la tensión normal y de corte se determina como sigue:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \xi_m + (1 - \text{sen} \beta) \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1)[(1-k_1) + (1+k_1)\text{sen} \beta]}{[(1-k_1) + (1+k_1)\text{sen} \beta]^2} \right] \right\} \quad (152)$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi_m \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2} \quad (153)$$

2.2.1 Ejemplos comparativos entre el criterio de rotura propuesto en macizos rocosos y el de Hoek y Brown

En función del procedimiento descrito, a continuación, se llevan a cabo una serie de gráficos comparativos entre el criterio de Hoek y Brown, y el propuesto por Úcar, teniendo en cuenta las ecuaciones (140) y (138). En esta última, se utilizan los valores de a_c de 18,75, 20 y 24 respectivamente.

Tabla 20. Parámetros utilizados aplicando los criterios de Úcar y Hoek y Brown. El valor de $a_c=18,75$.

RMR	k_1	k_2	σ_t (MPa)	σ_c (MPa)	ξ	ξ_m
40	0,916	1,318	-4,00	60,00	-0,067	-0,00092
60	0,882	1,860	-4,00	60,00	-0,067	-0,00383
80	0,836	2,617	-4,00	60,00	-0,067	-0,01598

D	GSI	m_i	m	s	a
0	40	15	1,760	0,00127	0,511
0	60	15	3,595	0,01174	0,503
0	80	15	7,343	0,10837	0,501

Tabla 21. Valores adimensionales del esfuerzo principal mayor y menor aplicando de los criterios de Úcar y Hoek y Brown El valor de $a_c=18,75$.

RMR = 40				RMR=60			RMR =80		
H&B	ÚCAR	Relación		H&B	ÚCAR	Relación	H&B	ÚCAR	Relación
σ_3/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB
0,00	0,03	0,04	1,33	0,11	0,12	1,11	0,33	0,34	1,05
0,25	0,91	0,89	0,98	1,20	1,16	0,96	1,64	1,57	0,96
0,50	1,44	1,39	0,97	1,85	1,76	0,95	2,45	2,31	0,94
0,75	1,90	1,83	0,96	2,40	2,28	0,95	3,12	2,93	0,94
1,00	2,34	2,23	0,96	2,91	2,75	0,95	3,73	3,49	0,93
1,50	3,14	2,99	0,95	3,84	3,61	0,94	4,84	4,49	0,93
2,00	3,90	3,70	0,95	4,70	4,40	0,94	5,85	5,40	0,92
2,50	4,63	4,37	0,94	5,52	5,15	0,93	6,80	6,25	0,92
3,00	5,34	5,03	0,94	6,31	5,87	0,93	7,71	7,07	0,92
3,50	6,03	5,67	0,94	7,07	6,57	0,93	8,59	7,85	0,91
4,00	6,71	6,30	0,94	7,82	7,25	0,93	9,44	8,60	0,91
4,50	7,38	6,92	0,94	8,56	7,92	0,93	10,27	9,34	0,91
5,00	8,04	7,53	0,94	9,28	8,57	0,92	11,08	10,05	0,91

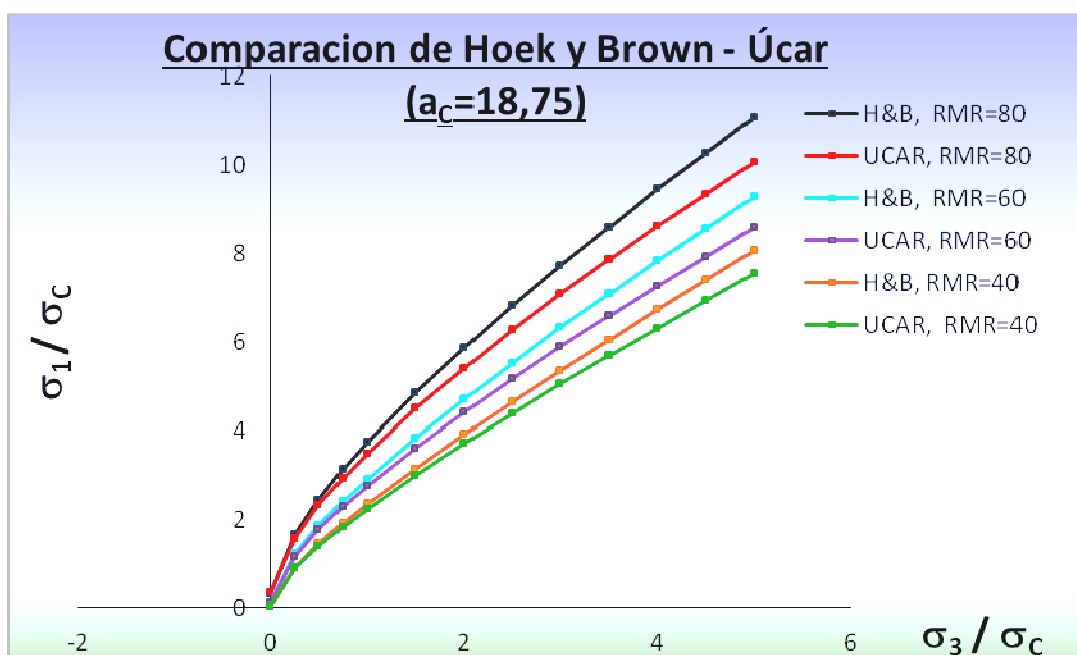


Figura 22. Comparación de los valores σ_1/σ_c , aplicando el criterio de rotura de Úcar y de Hoek y Brown considerando que $a_c=18,75$, junto con valores del índice de Bieniawski RMR de 80, 60 y 40.

Tabla 22. Parámetros utilizados aplicando los criterios de Úcar y Hoek y Brown. El valor de $a_c=20$.

RMR	k_1	k_2	σ_t (MPa)	σ_c (MPa)	ξ	ξ_m
40	0,930	1,615	-4,00	60,00	-0,067	-0,00092
60	0,895	2,132	-4,00	60,00	-0,067	-0,00383
80	0,845	2,804	-4,00	60,00	-0,067	-0,01598

D	GSI	m_i	m	s	a
0	40	15	1,760	0,00127	0,511
0	60	15	3,595	0,01174	0,503
0	80	15	7,343	0,10837	0,501

Tabla 23. Valores adimensionales del esfuerzo principal mayor y menor aplicando los criterios de Úcar y Hoek y Brown. El valor de $\sigma_c = 20$.

	RMR = 40			RMR=60			RMR =80		
	H&B	ÚCAR	Relación	H&B	ÚCAR	Relación	H&B	ÚCAR	Relación
	σ_3/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB
0,00	0,03	0,05	1,51	0,11	0,14	1,26	0,33	0,37	1,12
0,25	0,91	1,04	1,15	1,20	1,30	1,08	1,64	1,67	1,02
0,50	1,44	1,61	1,12	1,85	1,96	1,06	2,45	2,45	1,00
0,75	1,90	2,10	1,10	2,40	2,53	1,05	3,12	3,10	0,99
1,00	2,34	2,55	1,09	2,91	3,03	1,04	3,73	3,68	0,99
1,50	3,14	3,37	1,07	3,84	3,96	1,03	4,84	4,73	0,98
2,00	3,90	4,15	1,06	4,70	4,81	1,02	5,85	5,68	0,97
2,50	4,63	4,88	1,05	5,52	5,62	1,02	6,80	6,57	0,97
3,00	5,34	5,59	1,05	6,31	6,38	1,01	7,71	7,42	0,96
3,50	6,03	6,28	1,04	7,07	7,13	1,01	8,59	8,23	0,96
4,00	6,71	6,95	1,04	7,82	7,85	1,00	9,44	9,01	0,95
4,50	7,38	7,61	1,03	8,56	8,56	1,00	10,27	9,78	0,95
5,00	8,04	8,26	1,03	9,28	9,25	1,00	11,08	10,52	0,95

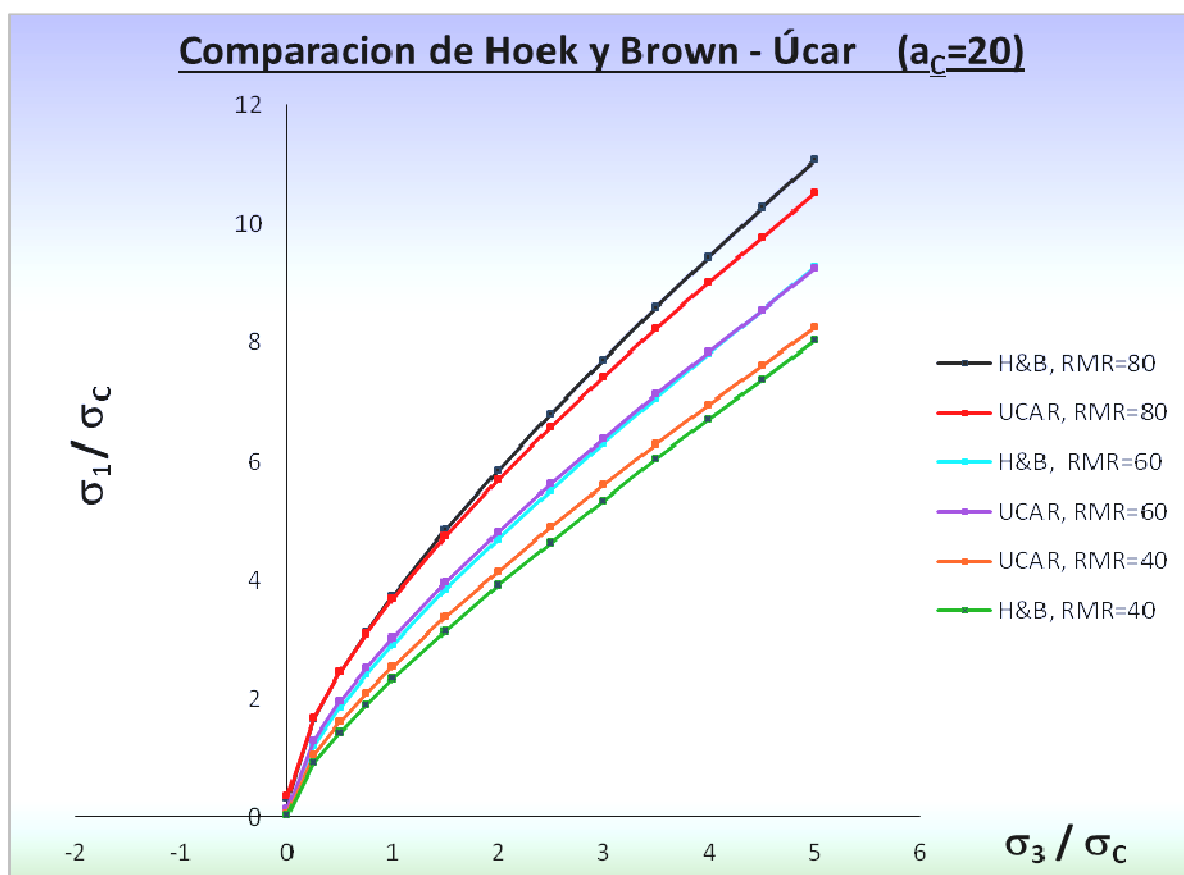


Figura 23. Comparación de los valores σ_1/σ_c aplicando el criterio de rotura de Úcar y de Hoek y Brown considerando que $a_c = 20$, junto con valores del índice de Bieniawski RMR de 80, 60 y 40.

Tabla 24. Parámetros utilizados aplicando los criterios de Úcar y Hoek y Brown. El valor de $a_c = 24$.

RMR	k_1	k_2	σ_t (MPa)	σ_c (MPa)	ξ	ξ_m
40	0,957	2,681	-4,00	60,00	-0,067	-0,00092
60	0,923	2,995	-4,00	60,00	-0,067	-0,00383
80	0,867	3,329	-4,00	60,00	-0,067	-0,01598

Tabla 24ª.

D	GSI	m_i	m	s	a
0	40	15	1,760	0,00127	0,511
0	60	15	3,595	0,01174	0,503
0	80	15	7,343	0,10837	0,501

Tabla 25. Valores adimensionales del esfuerzo principal mayor y menor considerando los criterios de Úcar y Hoek y Brown. El valor de $a_c = 24$.

RMR = 40				RMR=60			RMR =80		
	H&B	ÚCAR	Relación	H&B	ÚCAR	Relación	H&B	ÚCAR	Relación
σ_3/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB	σ_1/σ_c	σ_1/σ_c	Úcar/HB
0,00	0,03	0,08	2,48	0,11	0,19	1,77	0,33	0,43	1,32
0,25	0,91	1,58	1,74	1,20	1,74	1,45	1,64	1,95	1,18
0,50	1,44	2,38	1,65	1,85	2,59	1,40	2,45	2,84	1,16
0,75	1,90	3,04	1,60	2,40	3,30	1,37	3,12	3,58	1,15
1,00	2,34	3,64	1,56	2,91	3,93	1,35	3,73	4,24	1,13
1,50	3,14	4,72	1,50	3,84	5,06	1,32	4,84	5,41	1,12
2,00	3,90	5,71	1,46	4,70	6,09	1,30	5,85	6,47	1,11
2,50	4,63	6,63	1,43	5,52	7,05	1,28	6,80	7,46	1,10
3,00	5,34	7,51	1,41	6,31	7,96	1,26	7,71	8,40	1,09
3,50	6,03	8,37	1,39	7,07	8,84	1,25	8,59	9,29	1,08
4,00	6,71	9,19	1,37	7,82	9,69	1,24	9,44	10,15	1,08
4,50	7,38	9,99	1,35	8,56	10,52	1,23	10,27	10,99	1,07
5,00	8,04	10,78	1,34	9,28	11,32	1,22	11,08	11,80	1,07

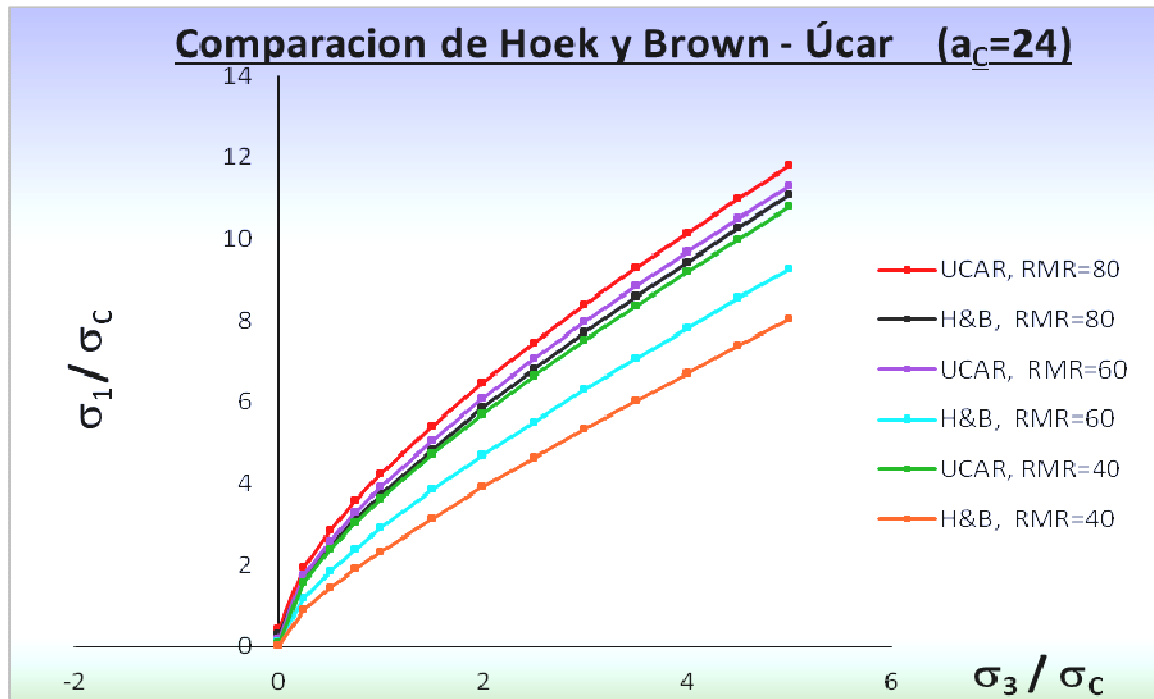


Figura 24. Comparación de los valores (σ_1/σ_c) , aplicando el criterio de rotura de Úcar y de Hoek y Brown (H-B) considerando que $a_c = 24$, junto con valores del índice de Bieniawski RMR de 80, 60 y 40.

A través de las tablas 21,23 y 25 es posible concluir con los siguientes comentarios:

- **$a_c = 18,75$ y $RMR = 40$**

En el intervalo cerrado $[0,5]$, es decir: $0 \leq (\sigma_3/\sigma_c) \leq 5$ los valores de (σ_1/σ_c) al aplicar ambos criterios se indican a continuación:

Cuando $(\sigma_3/\sigma_c) = 0$, la relación $(\sigma_1/\sigma_c) = (\sigma_{cm}/\sigma_c)$ considerando la curva de rotura de Úcar es un 33% mayor con respecto al criterio de HB.

Debe recordarse que la resistencia a compresión simple de la masa rocosa se obtiene a través de la expresión:

$$\eta_m = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \right) \approx \exp \left(\frac{RMR - 100}{a_c} \right) \Rightarrow \sigma_{cm} = \eta_m \cdot \sigma_c$$

En el intervalo $0,25 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 5$ la relación (σ_1 / σ_c) utilizando criterio de Úcar varía entre 0,98 a 0,94 con relación al de HB.

- **$a_c = 18,75$ y $RMR = 60$**

En el intervalo cerrado $[0,5]$, es decir: $0 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 5$ los valores de (σ_1 / σ_c) empleando ambos criterios se indican a continuación:

Cuando $(\sigma_3 / \sigma_c) = 0$, la relación $(\sigma_1 / \sigma_c) = (\sigma_{cm} / \sigma_c)$ teniendo en cuenta la curva de rotura de Úcar es un 11% mayor al equipararse con el criterio de HB.

En el intervalo $0,25 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 5$ el cociente (σ_1 / σ_c) utilizando el criterio de Úcar varía entre 0,96 a 0,92 con respecto al de HB.

- **$a_c = 18,75$ y $RMR = 80$**

En el intervalo cerrado $[0,5]$, es decir: $0 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 5$ los valores de (σ_1 / σ_c) considerando ambos criterios son los siguientes:

Cuando $(\sigma_3 / \sigma_c) = 0$, la relación $(\sigma_1 / \sigma_c) = (\sigma_{cm} / \sigma_c)$ empleando la curva de rotura de Úcar es un 5% mayor al compararse con el criterio de HB.

En el intervalo $0,25 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 5$ el cociente (σ_1 / σ_c) considerando el criterio de Úcar varía entre 0,96 a 0,91 con relación al de HB

Siguiendo el mismo procedimiento, a través de la tabla 23 y considerando el parámetro $a_c = 20$, se observa que ambos criterios de rotura se aproximan bastante bien.

Por el contrario, cuando $a_c = 24$ (tabla 25), existen diferencias importantes en particular cuando $RMR = 40$.

A medida que el índice de calidad RMR aumenta la diferencia entre ambos criterios disminuye.

En definitiva, una de los beneficios del método propuesto es que permite escoger el valor más adecuado del parámetro a_c , con la ventaja adicional de poder llevar a cabo estudios de simulación a través de excelentes programas asistidos por el ordenador. En estas condiciones es posible estudiar y analizar en detalle la resistencia al corte de la roca mediante el análisis estadístico de los datos simulados.

Así, los parámetros resistentes pueden ser tratados como **variables aleatorias** lográndose un nuevo espacio de investigación con la aplicación de la teoría de probabilidades y la estadística. Estos procedimientos, sin lugar a dudas ayudarán al ingeniero geotécnico a tomar la decisión más acertada.

2.3. COMENTARIOS FINALES

Utilizando la nueva propuesta que relaciona los esfuerzos principales en el instante de la rotura, y teniendo en cuenta al mismo tiempo el método analítico bidimensional desarrollado en esta investigación a través del cual se determina una nueva curva de resistencia intrínseca; es razonable concluir que se genera un nuevo campo de investigación al aplicar dicha envolvente de falla por cizallamiento en macizos rocosos.

Adicionalmente esta metodología puede extenderse a materiales de rotura frágil como el hormigón con resultados favorables, como se ha demostrado en este trabajo.

A la vez, se podrán optimizar los métodos analíticos en todo lo concerniente a la estabilidad de taludes, en el soporte de excavaciones subterráneas, junto con los procedimientos para el cálculo de la capacidad portante en roca de calidad pobre. Igualmente, en el diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, así como en otras muchas aplicaciones de interés geotécnico.

Por otra parte, se recomienda utilizar la referida ecuación en lugar de la bien conocida y empleada envolvente de falla de Mohr-Coulomb, la cual se ha estado utilizando en forma frecuente, a sabiendas que la verdadera curva de resistencia intrínseca no es lineal. En estas condiciones se deberá determinar previamente las constantes k_1 y k_2 evaluando la calidad del macizo rocoso, en función del grado de fractura, estructura geológica, tamaño de los bloques y meteorización de la roca.

Queda, si lo desean los lectores y estudiosos en la materia llevar a cabo la elaboración de una tabla considerando diferentes valores del parámetro $\xi=(\sigma_t/\sigma_c)$ y de ξ_m empleando la ecuaciones (140), (148), (145) y (147). Posteriormente se deberán obtener las respectivas constantes y luego poder comparar la ecuación algébrica obtenida $\sigma_1 = f(\sigma_3, \xi_m, k_1, k_2)$ con otros criterios de rotura.

Los criterios a comparar inicialmente además del Hoek y Brown generalizado, previamente equiparado en el párrafo anterior son los siguientes:

- Sheorey (1997)
- Ramamurty (1986)
- Murell-Bieniawski (1974). Empleando la solución obtenida por Úcar (1988) - Ver apéndice (D)
- Yu (2003)

Cabe señalar, que los aportes de Hoek y Brown, Barton, Sheorey, Ramamurty, Murrell-Bieniawski y Yu entre otros investigadores han sido de vital importancia en el desarrollo de la mecánica de rocas.

CAPÍTULO 3 CRITERIO APROXIMADO PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE LA ROCA CONSIDERANDO UN ESTADO DE ESFUERZO POLIAXIAL (TRIAxIAL VERDADERO)

3.1. INTRODUCCIÓN

Como previamente se ha mencionado, un aspecto de interés que se desea analizar a través de este apasionante tema concerniente con la resistencia de macizos rocosos, es desarrollar en el presente capítulo un criterio práctico y efectivo de rotura en tres dimensiones; por cuanto hay evidencias que demuestran que el esfuerzo principal intermedio σ_2 tiene una importante influencia en la resistencia de la roca, como lo han mencionado, Mogi [9], Yu [6], Zhang [20], Priest [25], Pan y Hudson [26] y Lade [27] entre otros investigadores.

Adicionalmente, es también fundamental conocer la magnitud, dirección e historia previa de las tensiones y por tanto, obtener valores más fiables al aplicar el criterio de rotura tridimensional propuesto. Todo esto, a sabiendas que no es fácil determinar el campo de esfuerzos "in situ" en la roca.

En base a lo previamente indicado, como un primer paso aproximado y considerando la ecuación bidimensional indicada en (34), a la tensión principal σ_1 se le adiciona el incremento de la resistencia $\Delta\sigma_1$ debida al

esfuerzo principal intermedio σ_2 . Posteriormente se comparan los resultados con los valores de σ_1 obtenidos por Mogi [9], través de ensayos poliaxiales, y cuyos estudios experimentales comenzaron por dicho autor a partir de 1964. Adicionalmente, también se equiparán junto con las ecuaciones propuestas por Zhang [26] y Yu [6]

Sin lugar a dudas, esta es una tarea difícil, en especial cuando se desea ampliar las condiciones de rotura para un estado poliaxial de tensiones en el cual $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

La ecuación sugerida es la siguiente:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2} \quad (154)$$

Donde k_3 es la nueva constante que se desea determinar para el estado poliaxial de tensiones

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} + \Delta\sigma_1 \quad (155)$$

De las ecuaciones anteriores se observa que el incremento $\Delta\sigma_1$ es:

$$\Delta\sigma_1 = k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2} \quad (156)$$

Al examinar la ecuación (156) resulta:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &> 0, \text{ si } \sigma_2 > \sigma_3 \\ \Delta\sigma_1 &= 0, \text{ si } \sigma_2 = \sigma_3 \\ \Delta\sigma_1 &= 0, \text{ si } \sigma_3 = \sigma_t \Rightarrow (\sigma_3 / \sigma_c) = \xi \end{aligned}$$

Por comodidad, las ecuaciones previamente indicadas tendrán la siguiente nomenclatura:

$$z = f(x, y) = k_1(x - \xi) + k_2(x - \xi)^{1/2} + k_3\{(x - \xi)(y - x)\}^{1/2} \quad (157)$$

Siendo,

$$x = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right), \quad y = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right), \quad z = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \quad (158)$$

La ecuación (157), define a z como una función explícita de las dos variables x e y , función que es precisamente $z = f(x, y)$.

Generalizando, se puede también representar por $f(x, y, z)$ al conjunto de operaciones efectuadas con las variables x, y, z , y con ciertas constantes.

Por tanto, es posible escribir la igualdad:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (159)$$

La ecuación anterior específica a una de las tres variables, en este caso a z , como función implícita de las otras dos x e y , puesto que asignando por ejemplo valores a éstas fijos x_0 e y_0 , queda determinado el valor o los valores correspondientes a z por la condición de satisfacer a la ecuación: $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Por cuanto, en el caso investigado se puede separar a la variable z , resulta a través de (157) que $z = f(x, y)$. Es decir, es un caso particular de (159), en el cual se obtiene que: $z - f(x, y) = 0$.

Por lo tanto, los innumerables puntos cuyas coordenadas (x, y, z) satisfacen a la ecuación anterior están dispuestos en el espacio de modo que forman una superficie (véase figura 25), que para el tema particular investigado corresponde a la forma :

$z = f(x, y)$, la cual está representada por la ecuación (157).

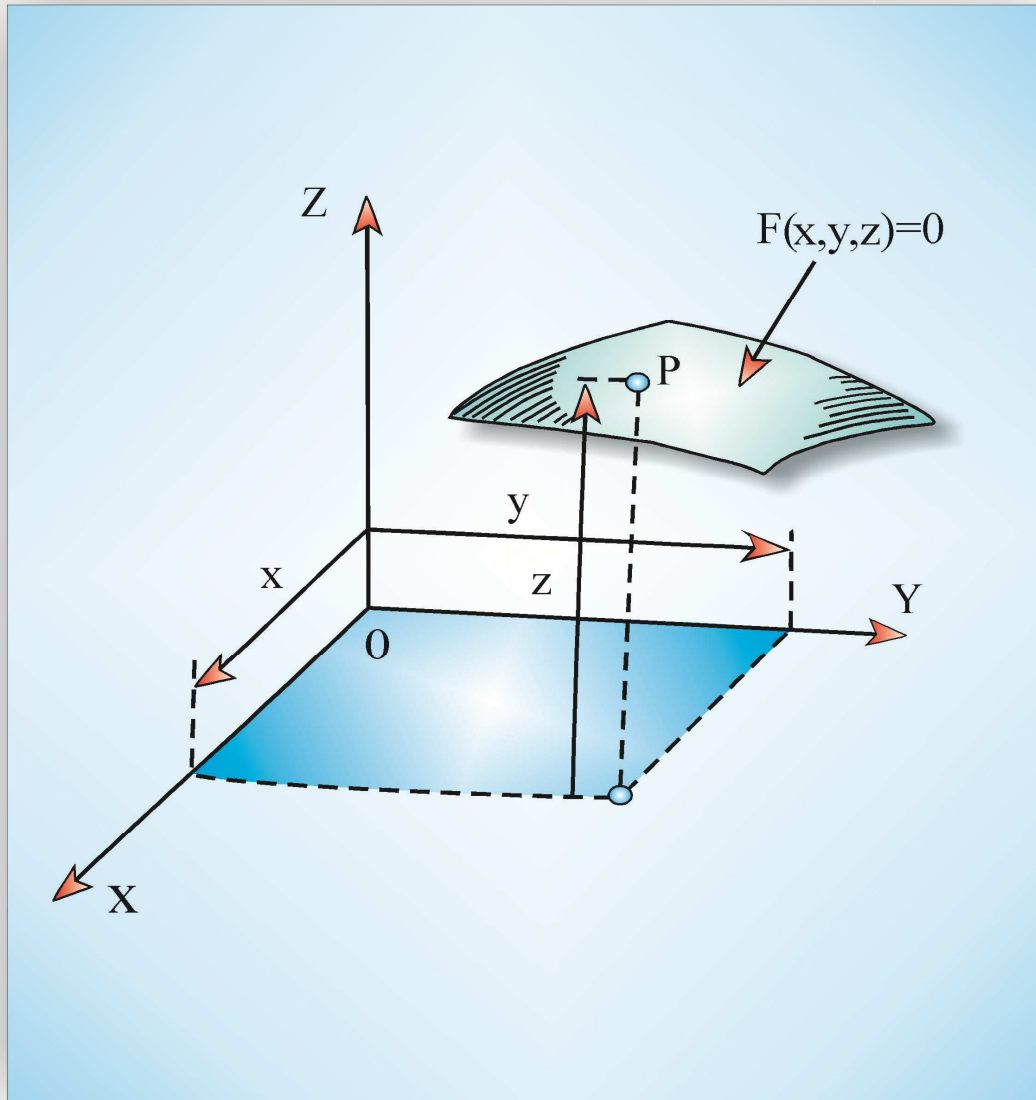


Figura 25. Representación gráfica de una superficie en el espacio x, y, z

Los tres números (x, y, z) pertenecen a las coordenadas cartesianas, en el espacio de un punto P. A medida que P recorre el dominio del conjunto, el referido punto describe lo que se conoce como "hoja de superficie"¹³.

Por otra parte, interesa también a través de la ecuación (159), el caso particular en el cual $f(x, y, h) = 0$, al elevar la curva a una altura o cota positiva $h = \sigma_1$ definida por tanto encima del plano $X \ O \ Y = \sigma_3 \ O \ \sigma_2$; y cuyas coordenadas deben evidentemente satisfacer a la referida ecuación. En estas condiciones es posible conocer a la superficie de igual nivel de tensión.

Cabe destacar, que al considerar los resultados de los ensayos realizados por el investigador Mogi [9], se determinó que el tercer término de la expresión algebraica de la ecuación (157) es el que mejor representa el incremento de la resistencia debida al el esfuerzo principal intermedio σ_2 .

Por otra parte, con la ayuda de las herramientas que otorga los métodos numéricos, es posible determinar el parámetro k_3 . Todo esto a través del ensayo poliaxial en función de los valores de $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$, los cuales en forma adimensional o normalizada con respecto a σ_c se han expresado considerando los cocientes: $(\sigma_3/\sigma_c), (\sigma_2/\sigma_c), (\sigma_1/\sigma_c) = x, y, z$. Por tanto, mediante la aplicación de algoritmos, se resuelven innumerables problemas por medio de la transformación de un conjunto de operaciones matemáticas.

Sin embargo, es fundamental a través de la ecuación (154), aplicar los métodos probabilísticos, los cuales conforman actualmente un pilar fundamental en el análisis y evaluación de los estudios geotécnicos.

Adicionalmente, cabe mencionar que en la práctica de la ingeniería del terreno es primordial reducir los niveles de incertidumbre de los parámetros resistentes junto con los modelos utilizados y otras fuentes que la generan.

También es oportuno destacar, que la aplicación de la técnica de simulación de Monte Carlo en los estudios de confiabilidad es cada día más utilizada por el ingeniero geotécnico.

¹³ Palacio Gros, A (1959) "Lecciones de Curvas Planas y Alabeadas, y Teoría de Superficies", Editorial Palas, México, D.F. 599p

3.2. DETERMINACIÓN APROXIMADA DEL PARÁMETRO k_3 - ROCA INTACTA Y HORMIGÓN

Las tablas anexas muestran los resultados de las pruebas poliaxiales realizadas por Mogi [9], en diferentes tipos de rocas, los cuales se comparan con el criterio propuesto representado a través de ecuación (154).

A continuación, se indican tres casos particulares de los ensayos poliaxiales, cuya metodología permite dar pistas o señales para determinar el referido parámetro.

Primer caso

$$\text{➤ } (\sigma_3/\sigma_c)=0, (\sigma_2/\sigma_c)=0, (\sigma_1/\sigma_c)=1 \quad (160)$$

Resultando a través de la ecuación (154):

$$Z = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2} = 1 \quad (161)$$

Segundo caso

$$\text{➤ } (\sigma_3/\sigma_c)=0, (\sigma_2/\sigma_c)=1, (\sigma_1/\sigma_c) \approx 1,2 \text{ a } 1,30 \quad (162)$$

Al aplicar (154) resulta:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = \overbrace{k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2}}^1 + k_3 \{ (-\xi) \}^{1/2} \quad (163)$$

Como previamente se ha demostrado, al considerar de nuevo la ecuación (161) resulta:

$$k_1 (-\xi) + k_2 (-\xi)^{1/2} = 1$$

Es decir, las ecuaciones (154) y (157) se transforman:

$$\boxed{z_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 1 + k_3 \{ (-\xi) \}^{1/2} = (1 + \Delta z_1)} \quad (164)$$

Es decir,

$$\boxed{\Delta z_1 = k_3 (-\xi)^{1/2}} \quad (165)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los diferentes valores experimentales obtenidos y reportados por Mogi [9] se ha logrado con aceptable aproximación que: $\Delta z_1 \approx 0,20$ a $0,30$.

Tercer caso

$$\triangleright (\sigma_3/\sigma_c)=1, (\sigma_2/\sigma_c)=1, (\sigma_1/\sigma_c) \approx (k_1+k_2)$$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2}} \quad (166)$$

Para valores poco más o menos del cociente $\xi = (\sigma_t/\sigma_c) = -1/10$ a $-1/25$, se obtiene con una aceptable aproximación que :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 (1 - \xi) + k_2 (1 - \xi)^{1/2} \approx (k_1 + k_2) \approx 4,50 \text{ a } 5,25$$

También, a través de la figura (20) y empleando las ecuaciones de Richart se obtienen valores semejantes de (σ_1/f'_c) para la condición en la cual $(\sigma_3/f'_c) = 1$ y $(\sigma_2/f'_c) = 1$. Cabe señalar que la figura (20), muestra los valores de resistencia del hormigón a través de la recopilación de ensayos

de compresión triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$), los cuales han sido indicados por Wang Chuan-zhi et al [15] teniendo en cuenta los trabajos de Richart y otros investigadores.

En resumen, se tiene:

➤ $(\sigma_3/\sigma_c) = 0, (\sigma_2/\sigma_c) = 0, (\sigma_1/\sigma_c) = 1$

*Valores comprendidos
en el intervalo cerrado:
 $1 \leq (\sigma_1/\sigma_c) \leq (k_1 + k_2)$*

➤ $(\sigma_3/\sigma_c) = 0, (\sigma_2/\sigma_c) = 1, (\sigma_1/\sigma_c) \approx 1,20 \text{ a } 1,30$

➤ $(\sigma_3/\sigma_c) = 1, (\sigma_2/\sigma_c) = 1, (\sigma_1/\sigma_c) \approx (k_1 + k_2) \approx 4,50 \text{ a } 5,25$

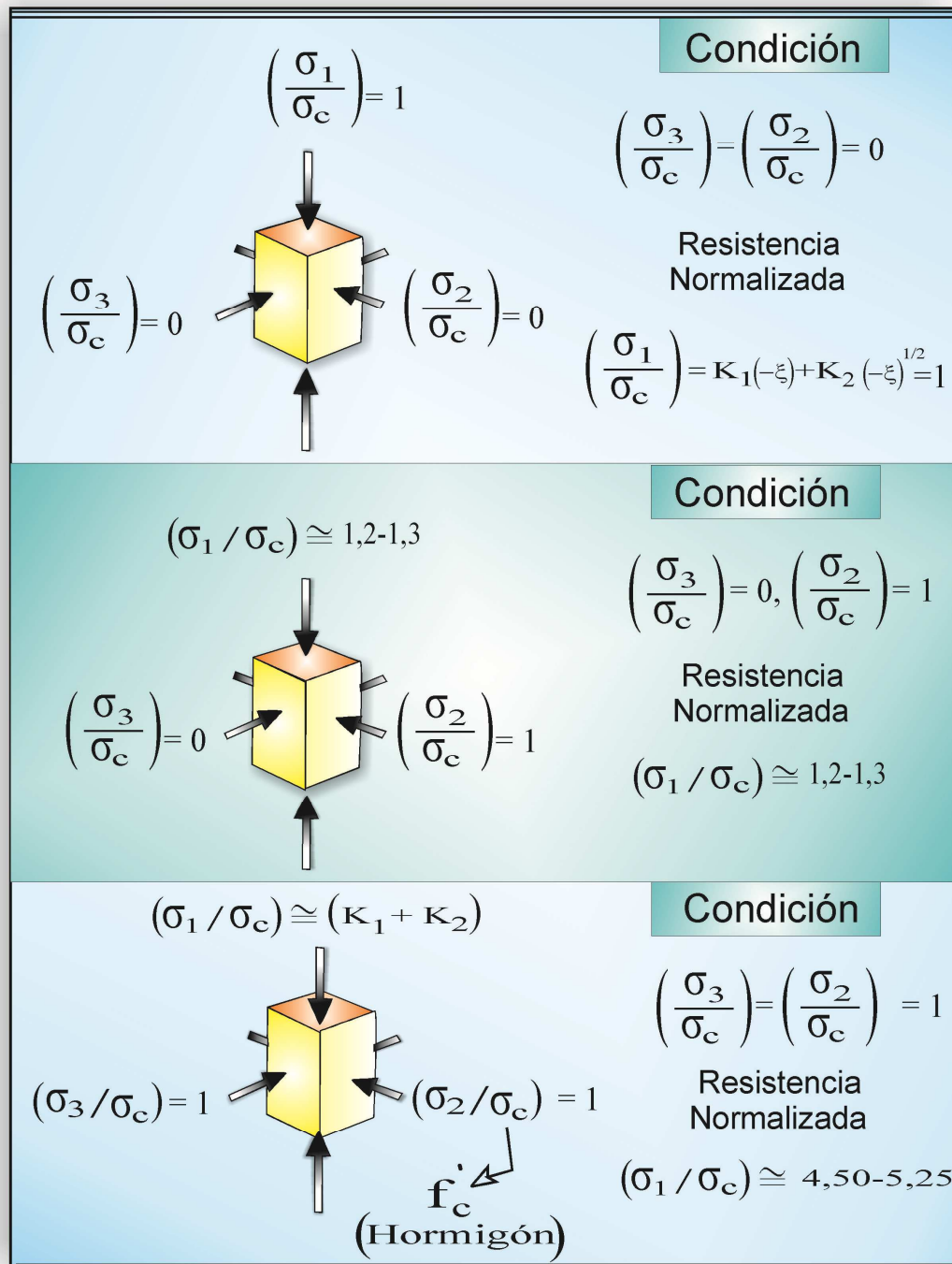


Figura 26. Valores de (σ_1 / σ_c) para diferentes condiciones de confinamiento, considerando el caso de roca intacta y el hormigón.

3.3. DETERMINACIÓN DEL PARÁMETRO k_3 A TRAVÉS DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

La finalidad de este apartado es conocer con la ayuda de la hoja de cálculo Excel el valor del parámetro k_3 que mejor se ajuste a los resultados experimentales realizados por Mogi [9] en pruebas poliaxiales.

El procedimiento de cálculo se lleva a cabo utilizando la función escalar representada por la ecuación (157), la cual es monótona creciente y continua.

También cabe señalar, que a través de las investigaciones realizadas para un estado poliaxial de tensiones, se demuestra que al considerar $k_3 = k_1$ se obtienen buenos resultados de la resistencia de la roca al equiparse con los valores de Mogi [9].

En estas condiciones, como una aproximación al problema se aplica el concepto de la derivada direccional, la cual representa la razón o tasa de cambio de la referida función en una determinada dirección.

Por otra parte, con la ayuda de las herramientas que nos otorga el análisis matemático, es posible determinar aproximadamente el parámetro k_3 al minimizar la derivada direccional, teniendo en cuenta los siguientes aspectos que se indican a continuación:

- Se ha considerado la función $z = f(x, y)$ definida en un entorno del punto $P_1(x, y)$ diferenciable en él, y una dirección orientada en el espacio dada por el vector unitario (versor) $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$, tal como se indica a través de la figura (27).

Adicionalmente, se desea hallar la rapidez de variación del punto $P_1(x, y) = P_1(x_1, y_1) = P_1(\sigma_3/\sigma_c, \sigma_2/\sigma_c)_1$ correspondiente al ensayo uno hacia $P_2(x_2, y_2) = P_2(\sigma_3/\sigma_c, \sigma_2/\sigma_c)_2$ del ensayo dos.

- Por lo tanto, el propósito es determinar la derivada $D_{\vec{u}} f$ de la función en el punto $P_1(x_1, y_1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, la cual es el producto escalar del gradiente en ese punto por $\vec{u}$:

Resultando,

$$D_u f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = |\vec{\nabla} f| \cdot |\vec{u}| \cos \alpha = |\vec{\nabla} f| \cdot \cos \alpha \quad (167)$$

Donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{\nabla} f$ y $\vec{u}$, los cuales representan el gradiente o nábla de f y el vector unitario respectivamente:

El punto $P(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ está en la superficie S que es el gráfico de la función $z=f(x,y)$. Su proyección sobre el plano XY es el punto $P_1(x_1, y_1, 0)$. Este punto y el vector unitario $\vec{u}$ determinan un plano vertical que corta la superficie S formando la curva C . Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es el valor de la derivada direccional. (Véase figura 27).

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right) \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{P_2 P_1}}{|\overrightarrow{P_2 P_1}|} &= \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \\ \frac{\overrightarrow{P_2 P_1}}{|\overrightarrow{P_2 P_1}|} &= \vec{u} = \overbrace{\left(\frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right)}^{u_x} \vec{i} + \overbrace{\left(\frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right)}^{u_y} \vec{j} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \quad (169)$$

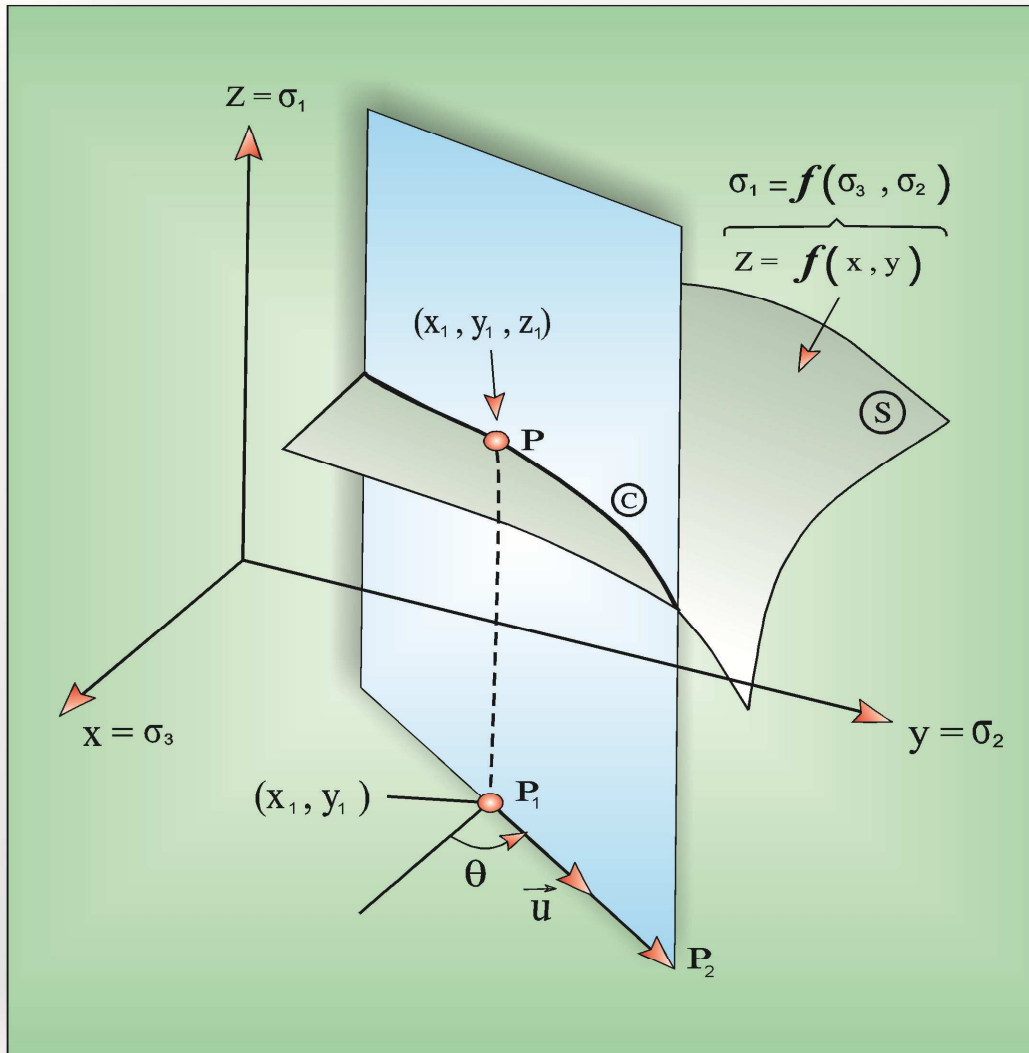


Figura 27. Derivada direccional en el punto P al avanzar en la dirección de $\vec{u}$.

La figura (27) proporciona la interpretación geométrica de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(x, y)$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ y en la dirección de $\vec{u}$.

Considerando nuevamente la ecuación (157) y hallando las derivadas a través de (168) resulta:

$$z = f(x, y) = k_1(x - \xi) + k_2(x - \xi)^{1/2} + k_3 \left\{ \overbrace{(x - \xi)(y - x)}^{(x y - x^2 - \xi y + \xi x)} \right\}^{1/2} \quad (170)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_x(x, y) = \left(k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{x - \xi}} + \frac{k_3(y - 2x + \xi)}{2\sqrt{(x - \xi)(y - x)}} \right) \quad (171)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_y(x, y) = \left(\frac{k_3(x - \xi)}{2\sqrt{(x - \xi)(y - x)}} \right) \quad (172)$$

Obteniéndose de acuerdo a (168) y (169):

$$D_u f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \underbrace{\left[\left(k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{x - \xi}} + \frac{k_3(y - 2x + \xi)}{2\sqrt{(x - \xi)(y - x)}} \right) \vec{i} + \left(\frac{k_3(x - \xi)}{2\sqrt{(x - \xi)(y - x)}} \right) \vec{j} \right]}_{\text{Gradiente de } f} \cdot \underbrace{(u_x \vec{i} + u_y \vec{j})}_{\text{Dirección de } \vec{u}} \quad (173)$$

Por lo tanto, la derivada direccional en la dirección de $\vec{u}$ en el punto de coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ es:

$$D_u f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \left(k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{x_1 - \xi}} + \frac{k_3(y_1 - 2x_1 + \xi)}{2\sqrt{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)}} \right) u_x + \left(\frac{k_3(x_1 - \xi)}{2\sqrt{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)}} \right) u_y \quad (174)$$

Una forma sencilla y aproximada de conocer el valor de k_3 se fundamenta en minimizar D_{uf} a través un estado de esfuerzo poliaxial ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). El análisis se lleva cabo para la condición particular en la cual se obtiene igual valor del esfuerzo principal mayor σ_1 al considerar dos ensayos con diferentes niveles de las tensiones σ_2 y σ_3 .

Es decir, la tensión principal σ_1 del ensayo número uno es igual a la tensión σ_1 de la segunda prueba de compresión poliaxial, siendo además evidente que $(\sigma_2, \sigma_3)_{\text{ensayo1}} \neq (\sigma_2, \sigma_3)_{\text{ensayo2}}$

La razón fundamental, así como la importancia de incorporar este caso específico, es que se ha podido observar a través de los diferentes ensayos realizados por Mogi [9], que los cocientes entre sus tensiones tangenciales octaédricas se aproximan o se acercan a la unidad para el caso particular previamente descrito.

Es decir,

$$\frac{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo1}}}{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo2}}} = \frac{(\tau_{\text{oct}})_1}{(\tau_{\text{oct}})_2} = \vartheta = \frac{\left(\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \right)_{\text{ensayo1}}}{\left(\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \right)_{\text{ensayo2}}} \rightarrow 1 \pm 5\%$$

(175)

En base a lo previamente indicado el parámetro k_3 puede calcularse como a continuación se indica en el cuadro siguiente.

Cuadro 1

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \right\}^{1/2}$$

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)_1 = x_1, \quad \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c}\right)_1 = y_1 \Rightarrow \text{Ensayo } N^o 1$$

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)_2 = x_2, \quad \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c}\right)_2 = y_2 \Rightarrow \text{Ensayo } N^o 2$$

El valor de k_3 para la condición en la cual $\overbrace{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)_1}^{z_1} = \overbrace{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)_2}^{z_2}$ es:

$$k_3 = \left\{ \frac{k_1 [(x_1 - \xi) - (x_2 - \xi)] + k_2 [\sqrt{(x_1 - \xi)} - \sqrt{(x_2 - \xi)}]}{\sqrt{(x_2 - \xi)(y_2 - x_2)} - \sqrt{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)}} \right\}$$

Por supuesto, si se conoce algún valor de la prueba poliaxial, sencillamente se determina k_3 , para la condición $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Sin embargo, se ha considerado llevar a cabo un proceso matemático más minucioso y elegante para determinar el parámetro k_3 teniendo en cuenta las condiciones previamente señaladas

Finalmente, al aplicar los métodos numéricos de Solver de la hoja de cálculo de Excel, se ha minimizado D_{uf} a través la ecuación (174) teniendo en cuenta además el valor de k_3 indicado en el cuadro 1 y considerando como celda variable independiente a $y=y_2=(\sigma_2/\sigma_c)_{\text{ensayo2}}$.

Todo esto sujeto a las siguientes restricciones indicadas en el cuadro adjunto.

Cuadro 2

$$0,95 \leq \frac{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo1}}}{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo2}}} = \frac{\left(\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_c}\right)_{\text{ensayo1}}}{\left(\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_c}\right)_{\text{ensayo2}}} \leq 1,05 \rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)_{\text{ensayo1}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right)_{\text{ensayo2}}$$

$$k_3 \geq k_1$$

Cuadro 3

$$\frac{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo1}}}{(\tau_{\text{oct}})_{\text{ensayo2}}} = \frac{(\tau_{\text{oct}})_1}{(\tau_{\text{oct}})_2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\sqrt{(z_1-y_1)^2 + (y_1-x_1)^2 + (x_1-z_1)^2}\right)_{\text{ensayo1}}}{\left(\frac{1}{3}\sqrt{(z_2-y_2)^2 + (y_2-x_2)^2 + (x_2-z_2)^2}\right)_{\text{ensayo2}}} = \vartheta$$

Siendo: $0,95 \leq \vartheta \leq 1,05$

$$z_1 = k_1(x_1 - \xi) + k_2(x_1 - \xi)^{1/2} + k_3\{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)\}^{1/2}$$

$$z_2 = k_1(x_2 - \xi) + k_2(x_2 - \xi)^{1/2} + k_3\{(x_2 - \xi)(y_2 - x_2)\}^{1/2}$$

$$z_1 = z_2$$

3.3.1 Ejemplo de Aplicación - Determinación de k_3 utilizando el programa Solver

Como se sabe SOLVER es un paquete matemático incorporado a Excel, que se utiliza para optimizar modelos matemáticos sujetos a restricciones.

La tabla 26 muestra los resultados de $y_2=(\sigma_2/\sigma_c)$ y k_3 a través del referido programa teniendo en cuenta los cuadros 1, 2 y 3, junto con las pruebas experimentales realizadas por Mogi [9], cuyos datos se indican a continuación.

Valores de las tensiones principales utilizando la tabla 3.13 del libro de Mogi [9] - Tipo de roca: Mármol de Yamaguchi

Resistencia a compresión simple de la roca intacta: $\sigma_c = 81,00$ MPa

$\sigma_3 = 70$ MPa, $\sigma_2 = 148,00$ MPa, $\sigma_1 = 335,00$ MPa (*Ensayo N°1*)

$\sigma_3 = 85$ MPa, $\sigma_2 = 119,00$ MPa, $\sigma_1 = 335,00$ MPa (*Ensayo N°2*)

Parámetros obtenidos al aplicar el criterio de rotura de Úcar:

$k_1 = 0,635$, $k_2 = 2,67$, $\xi = -0,12$, $\sigma_t = -9,27$ MPa

Expresando las tensiones en forma adimensional resulta:

Ensayo N°1

$P_1(x_1, y_1)$, $x_1 = \sigma_3 / \sigma_c = 0,864$ ($\sigma_3 = 70$ MPa), $y_1 = \sigma_2 / \sigma_c = 1,83$ ($\sigma_2 = 148$ MPa)

Ensayo N°2

$$P_2(x_2, y_2), x_2 = (\sigma_3 / \sigma_c) = 1,049 \ (\sigma_3 = 85 \text{ MPa}), y_2 = (\sigma_2 / \sigma_c)$$

A continuación la tensión principal intermedia σ_2 se determina al minimizar la derivada direccional, junto con el parámetro k_3 .

También según Mogi [9]: $Z_1 = \sigma_1 / \sigma_c = 4,135$ ($\sigma_1 = 335 \text{ MPa}$ - Ensayo 1)

$$Z_2 = \sigma_1 / \sigma_c = 4,135 \ (\sigma_1 = 335 \text{ MPa} - \text{Ensayo 2})$$

A continuación, la tabla anexa muestra los resultados de la hoja de cálculo de Excel aplicando *Solver*.

Tabla 26. Resultados aplicando el programa Solver

$k_1 = 0,635, k_2 = 2,67, \xi = -0,12$ $\sigma_c = 81,00 \text{ MPa} \quad \sigma_t = -9,27 \text{ MPa}$			Valores de Mogi		Criterio de Úcar
D_{uf} (<i>mínimo</i>)	k_3	$(\tau_{oct})_1 / (\tau_{oct})_2$	$y_2 = (\sigma_2 / \sigma_c)$	$x_2 = (\sigma_3 / \sigma_c)$	$z_2 = (\sigma_1 / \sigma_c)$
0,246	0,635 ($k_3 = k_1$)	0,966	1,195 (96,04 MPa)	1,049 (70 MPa)	3,89 (315 MPa)
0,2588	0,805	0,980	1,290 (104,5 MPa)	1,049 (70 MPa)	4,06 (329 MPa)
0,3169	1,30	1,000	1,467 (118,8 MPa)	1,049 (70 MPa)	4,53 (367 MPa)
$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2}$					

A través de la tabla 26, se observa que el valor de $y_2 = (\sigma_2 / \sigma_c) = 1,29$ es el que más se acerca al resultado de la prueba de compresión poliaxial llevada a cabo por Mogi [9]. Por lo tanto, la tensión principal intermedia

corresponde a $\sigma_2=104,50$ MPa, es decir, un 89% del valor experimental obtenido por dicho investigador. Igualmente, se ha obtenido para este caso en particular que el parámetro $k_3=0,805$ y la relación $(\tau_{oct})_1/(\tau_{oct})_2=0,98$. Siendo además la derivada direccional mínima $D_{\vec{u}}f=0,2588$.

Dicho valor significa que por cada unidad que varía el módulo de la distancia $|\overrightarrow{PP_1}|$ entre los puntos P_1 y P_2 en pequeños entornos del punto de coordenadas representado por P_1 (σ_3/σ_c , σ_2/σ_c) en la dirección del vector $\vec{u} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j})$ la función se incrementa en 0,2588.

Por otro lado, un aspecto relevante a mencionar a través de la referida tabla es que el parámetro k_3 , es muy sensible con pequeñas variaciones de la relación $\vartheta=(\tau_{oct})_1/(\tau_{oct})_2$.

También, debe señalarse que el procedimiento desarrollado aplicando el concepto de derivada direccional simplemente permite tener una aproximación aceptable del intervalo en el cual se encuentra k_3 .

3.3.2 Determinación de k_3 considerando los multiplicadores de Lagrange

En el caso de no utilizar directamente Solver, se puede minimizar la función $D_{\vec{u}}f$ sujeta a la condición previamente descrita entre las tensiones tangenciales octaédrica, aplicando el conocido método de los multiplicadores de Lagrange.

Por tanto, las dos funciones a considerar son:

$$D_{\vec{u}}f(y_2)=\left(k_1+\frac{k_2}{2\sqrt{x_1-\xi}}+\frac{k_3(y_1-2x_1+\xi)}{2\sqrt{(x_1-\xi)(y_1-x_1)}}\right)u_x+\left(\frac{k_3(x_1-\xi)}{2\sqrt{(x_1-\xi)(y_1-x_1)}}\right)u_y$$

(Véase ecuación 169) $\rightarrow u_x=f(y_2) \rightarrow u_y=f(y_2)$

(176)

Sujeta a la condición que $\psi(y_2)=0$ (Véase cuadro 3)

$$\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{3}\sqrt{(z_1-y_1)^2+(y_1-x_1)^2+(x_1-z_1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{3}\sqrt{(z_2-y_2)^2+(y_2-x_2)^2+(x_2-z_2)^2}\right)}}_{\psi(y_2)} - \vartheta = 0 \Rightarrow \psi(y_2) = 0 \quad (177)$$

Así, la nueva función toma la forma:

$$F(y_2, \lambda) = \underbrace{\left(k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{x_1-\xi}} + \frac{k_3(y_1-2x_1+\xi)}{2\sqrt{(x_1-\xi)(y_1-x_1)}} \right) u_x + \left(\frac{k_3(x_1-\xi)}{2\sqrt{(x_1-\xi)(y_1-x_1)}} \right) u_y}_{D_u f} + \lambda \cdot \psi \quad (178)$$

Recordando además que:

$$k_3(y=y_2) = \left\{ \frac{k_1[(x_1-\xi)-(x_2-\xi)] + k_2[\sqrt{(x_1-\xi)} - \sqrt{(x_2-\xi)}]}{\sqrt{(x_2-\xi)(y_2-x_2)} - \sqrt{(x_1-\xi)(y_1-x_1)}} \right\} \quad (179)$$

La minimización se lleva a cabo considerando:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad (180)$$

Por tanto, a través de la ecuación (180) junto con (175), y especificando además un determinado valor del parámetro ϑ ; por ejemplo que el cociente $\vartheta = (\tau_{oct})_1 / (\tau_{oct})_2 = 0,95$, se obtiene y_2 , λ y k_3 .

No cabe la menor duda de la gran ventaja de utilizar la herramienta matemática Solver, ya que a través de los algoritmos matemáticos que utiliza, se logran excelentes resultados además de la celeridad de respuesta con la ayuda del ordenador.

Por supuesto, llevar a cabo el proceso de derivar las ecuaciones indicadas en (180) es sin lugar a dudas un proceso laborioso; esto sin contar que posteriormente hay que resolver el sistema de ecuaciones simultáneas no lineales para determinar y_2 y λ . Todo esto para lograr igual resultado, como se apreciará en las páginas siguientes empleando el programa matemático MAPLE.

3.3.3 Determinación de k_3 aplicando el programa MAPLE

Nuevamente se han considerado las pruebas experimentales realizadas por Mogi [9] del Mármol de Yamaguchi.

Aplicando los mismos datos del ejemplo anterior, los resultados se comparan con los valores de k_3 de la tabla 26.

Cuadro 4. Ecuaciones Principales

$$k_3(y = y_2) = \left\{ \frac{\overbrace{k_1[(x_1 - \xi) - (x_2 - \xi)] + k_2[\sqrt{(x_1 - \xi)} - \sqrt{(x_2 - \xi)}]}^{\beta}}{\underbrace{\sqrt{(x_2 - \xi)}(y_2 - x_2) - \sqrt{(x_1 - \xi)}(y_1 - x_1)}_{\beta_1}} \right\}$$

Derivada direccional $D_u f$

$$D_u f(y_2) = \left(k_1 + \frac{\overbrace{k_2}^{\beta_2}}{2\sqrt{x_1 - \xi}} + k_3(y_2) \cdot \frac{(y_1 - 2x_1 + \xi)}{\underbrace{2\sqrt{(x_1 - \xi)}(y_1 - x_1)}}_{\beta_3} \right) u_x +$$

$$+ k_3(y_2) \cdot \left(\frac{(x_1 - \xi)}{\underbrace{2\sqrt{(x_1 - \xi)}(y_1 - x_1)}}_{\beta_4} \right) u_y$$

Cuadro 5. Constantes utilizadas

$$\beta = k_1 [(x_1 - \xi) - (x_2 - \xi)] + k_2 [\sqrt{(x_1 - \xi)} - \sqrt{(x_2 - \xi)}]$$

$$\beta_1 = \sqrt{(x_1 - \xi) - (y_1 - x_1)} \quad , \quad \beta_2 = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{x_1 - \xi}}$$

$$\beta_3 = \frac{y_1 - 2x_1 + \xi}{2\sqrt{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)}} \quad , \quad \beta_4 = \frac{(x_1 - \xi)}{2\sqrt{(x_1 - \xi)(y_1 - x_1)}}$$

Cuadro 6. $k_3(y_2)$ y su derivada

$$k_3(y_2) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{(x_2 - \xi) \cdot (y_2 - x_2)} - \beta_1} \right) \quad , \quad k'_3 = \frac{dk_3}{dy_2}$$

$$k'_3 = -\frac{1}{2} \frac{\beta \cdot (x_2 - \xi)}{\left[\sqrt{(x_2 - \xi) \cdot (y_2 - x_2)} - \beta_1 \right]^2 \cdot \sqrt{(x_2 - \xi) \cdot (y_2 - x_2)}}$$

Cuadro 7. Componentes del vector unitario y sus derivadas

$$u_x = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad , \quad u'_x = \frac{du_x}{dy_2} = \frac{-(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{3/2}}$$

$$u_y = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad , \quad u'_y = \frac{du_y}{dy_2}$$

$$u'_y = \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} - \frac{(y_2 - y_1)^2}{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right]^{3/2}}$$

Cuadro 8. Función condicionante ψ y su derivada

$$\psi = \frac{\frac{1}{3} \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (y_1 - x_1)^2 + (x_1 - z_1)^2}}{\frac{1}{3} \sqrt{(z_2 - y_2)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (x_2 - z_2)^2}} - \vartheta$$

$$\psi' = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (y_1 - x_1)^2 + (x_1 - z_1)^2} \cdot (-2z_2 + 4y_2 - 2x_2)}{\left((z_2 - y_2)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (x_2 - z_2)^2 \right)^{3/2}}$$

Cuadro 9. Función F y su derivada

$$F = [\beta_2 + k_3 \beta_3] u_x + k_3 \beta_4 u_y + \lambda \psi$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = k'_3 \cdot \beta_3 \cdot u_x + [\beta_2 + k_3 \beta_3] u'_x + k'_3 \cdot \beta_4 \cdot u_y + k_3 \cdot \beta_4 \cdot u'_y + \lambda \cdot \psi' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (y_1 - x_1)^2 + (x_1 - z_1)^2}}{\sqrt{(z_2 - y_2)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (x_2 - z_2)^2}} - \vartheta = 0$$

Considerando los datos indicados en el ejemplo de la sección 3.3.1, se obtiene:

$$\beta = -0,356 \quad , \quad \beta_1 = 0,974$$

$$\beta_2 = 1,981 \quad , \quad \beta_3 = -0,011, \beta_4 = 0,505$$

$$k_3 = \frac{0,356}{\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974}$$

$$k'_3 = \frac{0,208}{\left[\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974 \right]^2 \cdot \sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227}}$$

$$u_x = \frac{0,185}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} \quad , \quad u'_x = \frac{-0,093 \cdot (2 \cdot y_2 - 3,654)}{\left[0,034 + (y_2 - 1,827)^2\right]^{3/2}}$$

$$u_y = \frac{(y_2 - 1,827)}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}}$$

$$u'_y = \frac{1}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} - \frac{1}{2} \frac{(y_2 - 1,827)(2 \cdot y_2 - 3,654)}{\left[0,034 + (y_2 - 1,827)^2\right]^{3/2}}$$

$$\psi = \frac{4,118}{\sqrt{(4,136 - y_2)^2 + (y_2 - 1,049)^2 + 9,526}} - 0,98$$

$$\psi' = - \frac{2,059 \cdot (-10,370 + 4 \cdot y_2)}{\left((4,136 - y_2)^2 + (y_2 - 1,049)^2 + 9,526\right)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} F = & \left[1,981 - 0,011 \cdot \left(\frac{0,356}{\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974} \right) \right] \cdot \left(\frac{0,185}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} \right) \\ & + 0,505 \cdot \left(\frac{0,356}{\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974} \right) \cdot \left(\frac{(y_2 - 1,827)}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} \right) \\ & + \lambda \cdot \left(\frac{4,118}{\sqrt{(4,136 - y_2)^2 + (y_2 - 1,049)^2 + 9,526}} - 0,98 \right) \end{aligned}$$

Ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}
 f_1 = \frac{\partial F}{\partial y_2} = & -0,011 \cdot \left(\frac{0,208}{\left[\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974 \right]^2 \cdot \sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227}} \right) \cdot \left(\frac{0,185}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} \right) \\
 & + \left[1,981 - 0,011 \cdot \left(\frac{0,356}{\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974} \right) \right] \cdot \left(\frac{-0,093 \cdot (2 \cdot y_2 - 3,654)}{\left[0,034 + (y_2 - 1,827)^2 \right]^{3/2}} \right) \\
 & + 0,505 \cdot \left(\frac{0,208}{\left[\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974 \right]^2 \cdot \sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227}} \right) \cdot \left(\frac{(y_2 - 1,827)}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} \right) \\
 & + 0,505 \cdot \left(\frac{0,356}{\sqrt{1,169 \cdot y_2 - 1,227} - 0,974} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0,034 + (y_2 - 1,827)^2}} - \frac{1}{2} \frac{(y_2 - 1,827)(2 \cdot y_2 - 3,654)}{\left[0,034 + (y_2 - 1,827)^2 \right]^{3/2}} \right) \\
 & + \lambda \cdot \left(-\frac{2,059 \cdot (-10,370 + 4 \cdot y_2)}{\left((4,136 - y_2)^2 + (y_2 - 1,049)^2 + 9,526 \right)^{3/2}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$f_2 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{4,118}{\sqrt{(4,136 - y_2)^2 + (y_2 - 1,049)^2 + 9,526}} - 0,98 = 0$$

Para resolver el sistema de ecuaciones a través de Maple se ha utilizado el siguiente comando:

$$fsolve(\{f_1, f_2\}, \{y_2, \lambda\})$$

Resultados aplicando el programa Maple

$$\text{Si } \vartheta = 0,966, \lambda = -0,464, y_2 = 1,199 \Rightarrow k_3 = 0,641$$

$$\text{Si } \vartheta = 0,98, \lambda = -1,308, y_2 = 1,294 \Rightarrow k_3 = 0,812$$

$$\text{Si } \vartheta = 1,00, \lambda = -3,210, y_2 = 1,437 \Rightarrow k_3 = 1,186$$

Resultados aplicando el programa Solver (Tabla 26)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \vartheta = 0,966, y_2 = 1,199 \Rightarrow k_3 = 0,635 \\ \text{Si } \vartheta = 0,98, y_2 = 1,294 \Rightarrow k_3 = 0,805 \\ \text{Si } \vartheta = 1,00, y_2 = 1,467 \Rightarrow k_3 = 1,30 \end{array} \right.$$

A través de los resultados obtenidos empleando el programa Maple, se observa que los valores de y_2 y k_3 son muy semejantes al compararse con los calculados a través de Solver (tabla 26). La única diferencia notable corresponde cuando $\vartheta=1$.

Adicionalmente, como se podrá apreciar en la tabla siguiente, al considerar el caso particular que $k_3=k_1$ se obtienen buenos resultados al calcular la resistencia de la roca para un estado poliaxial de tensiones.

A continuación, se lleva a cabo otro ejemplo utilizando los valores experimentales de Mogi [9] en la roca Dolomita de Dunham.

Los resultados se indican en tabla N°27a, considerando el caso particular previamente referido.

Tabla27a

Valores reportados por Mogi [9] en ensayos poliaxiales- Dolomita de Dunham			Criterio de Úcar Empleando la ecuación (154) y considerando que $k_3=k_1$ $\xi=-0,08$, $\Delta z_1 = k_3 (-\xi)^{1/2}$		
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	$k_3=k_1$	σ_1 (MPa) Criterio de Úcar	Δz_1
65	262	685	0,736	657	0,21
85	153	719	0,736	693	0,21
105	167	778	0,736	761	0,21

El segundo caso corresponde cuando el parámetro $k_3 \neq k_1$, obteniéndose los siguientes resultados a través de la tabla Tabla 27b.

Tabla 27b

Valores reportados por Mogi [9] en ensayos poliaxiales - Dolomita de Dunham			Criterio de Úcar empleando la ecuación (154) y considerando que $k_3 \neq k_1$		
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_1 (MPa)	Valores de k_3	σ_1 (MPa)	Δz_1
65	262	685	0.95	685	0,27
85	153	719	1.04	719	0,29
105	167	778	0,94	778	0,27
$\xi=(\sigma_t/\sigma_c) = -0,08$, $\Delta z_1 = k_3 \sqrt{-\xi}$, $k_1=0,736$, $k_2=3,32$					

En la referida tabla N° (27b) se observa, que aun cuando el parámetro k_3 se ha incrementado entre un 30% y 40%, el valor de la tensión principal σ_1 crece mucho más lento, alrededor del 2% al 4% aproximadamente

Por otra parte, es importante señalar nuevamente que a través de la investigación realizada en la sección 3.4, se obtienen resultados aceptables al considerar que $k_3=k_1$ utilizando y comparando los valores experimentales de Mogi [9].

A la vez, este valor representa la cota inferior de la imagen de la función para valores de $k_3 \geq k_1$.

En resumen, el valor de $k_3=k_1$ se puede tomar como un buena aproximación para calcular la tensión principal mayor σ_1 al considerar un estado poliaxial de tensiones.

Por lo tanto, en base a los estudios realizados se recomienda para fines prácticos que el parámetro k_3 varíe entre los límites $k_3 = k_1$ a $k_3 = 1,5 k_1$, dando como resultado que el valor de Δz_1 pueda determinarse poco más o menos en el siguiente intervalo cerrado $0,20 \leq \Delta z_1 \leq 0,30$.

Es decir:

$$\Delta z_1 = k_3 (-\xi)^{1/2} \approx 0,20 \text{ a } 0,30 \quad .$$

En definitiva, se desea hallar dicho parámetro conociendo únicamente el parámetro adimensional $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$, por cuanto previamente se ha demostrado que: $k_1 = f(\xi)$, y $k_2 = f(k_1, \xi)$. Véase ecuaciones (109) y (106).

Por ejemplo, aplicando el caso descrito en la sección 3.3.1, y considerando $\xi = -0,12$, se obtiene el siguiente rango de k_3 :

$$\begin{aligned} 0,20 &= k_3 (0,12)^{1/2} \rightarrow k_3 = 0,58 \\ 0,30 &= k_3 (0,12)^{1/2} \rightarrow k_3 = 0,87 \end{aligned}$$

$$k_3 = k_1 = 0,635 \text{ (valor recomendado inicialmente)}$$

Como comentario final para concluir esta sección debe destacarse que entre los criterios que consideran el efecto de la tensión principal intermedio σ_2 se encuentra el de von Mises. Dicho criterio establece que la **tensión tangencial octaédrica τ_{oct} es constante**, la cual puede también interpretarse que la energía de distorsión por unidad de volumen es constante. Sin embargo, en materiales geológicos y el hormigón el valor de τ_{oct} depende de la presión de confinamiento y por tanto de la tensión normal σ_{oct} , es decir, de la primera invariante I_1 . Además, las pruebas experimentales demuestran que τ_{oct} es monótona creciente, dando como resultado según lo menciona Mogi [9] que varios investigadores hayan propuesto expresiones de rotura $\tau_{oct}=f(\sigma_{oct})$, tales como: $\tau_{oct}=C_1 \sigma_{oct} + C_2$, $\tau_{oct}^2 = C \cdot \sigma_{oct}$ y también $\tau_{oct}=f(\alpha \sigma_{oct} + \beta \sigma_3 + \gamma)$. Siendo: C , C_1 , C_2 , α , β y γ constantes.

En este epígrafe se ha estudiado el caso particular en el cual el nivel de la tensión principal mayor σ_1 permanece constante para determinados valores de σ_2 y σ_3 ; observándose además a través de los resultados experimentales reportados por Mogi [9] que la tensión tangencial τ_{oct} se mantiene prácticamente constante para la referida condición, pudiendo variar entre un ensayo a otro alrededor de un 5%.

Esto ha permitido llevar a cabo un procedimiento para minimizar la derivada direccional y por ende concluir que al aplicar la simple aproximación $k_3 = k_1$, se obtienen para un estado poliaxial de tensiones resultados suficientemente aceptables de la resistencia de la roca; cuyos valores se encuentran poco más o menos cercanos a la tensión principal σ_1 .

3.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS CONSIDERANDO UN ESTADO DE ESFUERZO POLIAXIAL EN ROCA INTACTA

Vista la importancia del tema, a continuación se comparan los resultados experimentales llevados a cabo por Mogi [9] aplicando diferentes niveles de confinamiento y considerando además la condición en la cual $\sigma_3 = \sigma_2$ y $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

En su libro *Experimental Rock Mechanics*, dicho autor investiga detalladamente la deformación y rotura en varias clases de rocas y bajo diferentes presiones de confinamiento.

Las ecuaciones a equiparar son las siguientes:

- Zhang [20] propone la siguiente expresión para un estado poliaxial de tensiones en el instante de la falla, empleando el criterio bidimensional de rotura modificado de Hoek y Brown; el cual incluye la caracterización geológica a través del índice GSI.

Por lo tanto, en términos de las presiones efectivas, la ecuación según Zhang [20] es:

$$\left[\frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma_c} \right) \right]^{(1/a)} + \frac{m}{2} \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma_c} \right) \right] - \frac{m}{2} \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) = s \quad (181)$$

Siendo,

$$\left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma'_2 - \sigma'_3}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma'_3 - \sigma'_1}{\sigma_c} \right)^2} \quad (182)$$

m, s, a = Constantes que dependen de las propiedades de la roca al aplicar el criterio de rotura de Hoek y Brown (Para mayor detalle véase la sección 2 del apéndice C)

- Yu [6] también considera para un estado poliaxial de tensiones el criterio original de rotura de Hoek y Brown, agregando un parámetro adicional b relacionado con la tensión principal intermedia σ_2 .

Según dicho autor b varía entre 0,5 y 1, para la mayoría de las rocas. Adicionalmente, puede determinarse utilizando la fórmula:

$$b = \left(\frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0} \right) \quad (183)$$

Siendo $\alpha = (\sigma_t / \sigma_c)$ y τ_0 = resistencia al corte a cero tensión normal. Por otra parte, a través del criterio de Hoek y Brown se sabe que:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(m - \sqrt{m^2 + 4s} \right) \Rightarrow \text{macizos rocosos} \quad (184)$$

Para roca intacta $m = m_i$ y $s=1$, resultado:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(m_i - \sqrt{m_i^2 + 4} \right) \quad (185)$$

Adicionalmente (ver apéndice C): $m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \quad (186)$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \left(m_i - \sqrt{m_i^2 + 4} \right) = -\frac{1}{2} \left(m_i - \sqrt{m_i^2 \left(1 + \frac{4}{m_i^2} \right)} \right) \\ \text{Teniendo en cuenta que } \left(\frac{4}{m_i^2} \right) &= \Delta x \ll 1, m_i \approx 10 \text{ a } 25 \\ \sqrt{m_i^2 \left(1 + \frac{4}{m_i^2} \right)} &= m_i \sqrt{(1 + \Delta x)} \approx m_i \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \right] \approx m_i + \frac{m_i}{2} \left(\frac{4}{m_i^2} \right) \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \left\{ m_i - m_i - \frac{m_i}{2} \left(\frac{4}{m_i^2} \right) \right\} \approx \frac{1}{m_i} \\ \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) &\approx \frac{1}{m_i} \Rightarrow m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \end{aligned} \quad (187)$$

La ecuación propuesta por Yu [6] es la siguiente:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{1}{1+b} \right) \left[b \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right] + \sqrt{\frac{m}{(1+b)} \left[b \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right] + s} \quad (188)$$

Se observa que al considerar $b=0$ en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación original de Hoek y Brown para un estado de rotura bidimensional.

➤ **Criterio propuesto en el presente trabajo (roca intacta)**

La ecuación de rotura descrita y propuesta en el presente epígrafe para un estado poliaxial de tensiones para hormigón y roca intacta es de la forma:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2} \quad (189)$$

Considerando que se conoce la razón $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$, las constantes k_1 y k_2 se obtienen empleando las ecuaciones (109) y (106), por tanto:

$$k_1 = \frac{-(1 + |\xi|) + \sqrt{(1 + 7|\xi|)(1 - |\xi|)}}{2|\xi|} \quad k_2 = \frac{[1 - k_1(-\xi)]}{\sqrt{-\xi}} \quad (190)$$

Posteriormente, para completar el tercer parámetro se designa a $k_3 = k_1$.

Como previamente se ha indicado, si no se conoce la resistencia a la tracción σ_t las constantes k_1 y k_2 se determinan para un estado de compresión triaxial ($\sigma_3 = \sigma_2$), estimando un valor inicial de $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$.

Si los resultados obtenidos correspondientes a la tensión principal σ_1 empleando la ecuación propuesta no se aproximan a los valores experimentales, seguidamente se lleva a cabo otro tanteo en función del nuevo valor que se le ha asignado al parámetro ξ . El proceso se repite hasta lograr la aproximación deseada.

Una vez, determinadas las constantes k_1 y k_2 se considera nuevamente $k_3 = k_1$, aunque también pueden emplearse valores en el intervalo cerrado: $k_1 \leq k_3 \leq 1,5 k_1$. Sin embargo, debe señalarse que al considerar $k_3 = 1,5 k_1$, el incremento en la tensión principal σ_1 no es mayor del 5%.

Por otra parte, al comparar las tres ecuaciones, se aprecia que al aplicar el criterio de rotura de Yu [6], éste tiene la desventaja que es necesario conocer adicionalmente la resistencia al corte τ_o , a objeto de poder determinar el parámetro b , el cual se obtiene a través de la ecuación (183).

Por supuesto, también el referido parámetro puede calcularse aproximadamente conociendo al menos un valor de $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$ a través de la prueba de compresión poliaxial. Resumiendo, los parámetros requeridos para determinar la tensión principal mayor σ_1 , en los tres criterios mencionados son los siguientes:

➤ **Criterio de Zhang**

Datos iniciales (Roca intacta /hormigón): σ_t y σ_c , conjuntamente con los parámetros de Hoek y Brown $m=m_i \approx (\sigma_t/\sigma_c)$, $s=1$, y $a=0,50$.

➤ **Criterio de Yu**

Datos iniciales (Roca intacta /hormigón): $b=f(\alpha, \tau_0, \sigma_t)$, siendo la razón $\alpha=(\sigma_t/\sigma_c)$, τ_0 =resistencia al corte a cero tensión normal. Adicionalmente el criterio incluye a las constantes ya mencionadas $m=m_i \approx (\sigma_t/\sigma_c)$ y $s=1$.

➤ **Criterio de Úcar**

Datos iniciales (Roca intacta /hormigón): $\xi=(\sigma_t/\sigma_c)$, $k_1=k_3=f(\xi)$ y $k_2=f(k_1, \xi)$ Para mayor detalle véase la ecuación (190).

La ventaja de los criterios de rotura de Zhang y Úcar, para determinar la tensión principal σ_1 , tanto en el hormigón como en la roca intacta, es que sólo se necesita conocer σ_t y σ_c . En el caso de la ecuación Yu hay que calcular adicionalmente τ_0 .

A continuación, se comparan las tres ecuaciones con los valores experimentales de Mogi [9], determinándose también para cada caso en particular el error estándar Se.

➤ **Dolomita de Dunham (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -21,00 \text{ MPa} , \sigma_c = 261,50 \text{ MPa} , \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,080 , b = 0,436 \text{ (Yu)}$$

$$k_1=0,737, \quad k_2=3,32, \quad k_3= k_1=0,737, \quad m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| = 12,50, \quad s=1, \quad a=0,50$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	72,03 MPa	55,92 MPa	52,37 MPa

Dolomita de Dunham**Tabla 28**

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0	0	1,00	261,50	261,5	261,50	261,50
25	25	0,10	0,10	1,52	398,02	400	372,39	372,39
25	66	0,10	0,25	1,64	430,01	475	418,46	420,49
25	96	0,10	0,37	1,68	440,12	495	446,43	453,71
25	129	0,10	0,49	1,72	448,97	560	472,44	488,70
25	174	0,10	0,67	1,76	459,00	571	459,00	534,26
25	229	0,10	0,88	1,79	469,38	586	522,99	587,18
25	272	0,10	1,04	1,82	476,54	545	530,19	626,82
45	45	0,17	0,17	1,85	484,78	487	448,14	448,14
45	97	0,17	0,37	2,02	527,94	570	501,39	503,00
45	126	0,17	0,48	2,06	538,65	576	526,14	532,16
45	160	0,17	0,61	2,10	548,96	606	551,19	565,26
45	183	0,17	0,70	2,12	555,09	639	565,84	587,06
45	240	0,17	0,92	2,17	568,35	670	594,22	639,34
45	266	0,17	1,02	2,19	573,75	670	603,25	662,44
45	294	0,17	1,12	2,21	579,22	622	609,95	686,87
65	65	0,25	0,25	2,15	561,24	568	517,06	517,06
65	117	0,25	0,45	2,33	610,50	638	567,77	568,01
65	153	0,25	0,59	2,39	625,32	644	597,26	601,87
65	208	0,25	0,80	2,46	642,93	687	634,44	651,72
65	262	0,25	1,00	2,51	657,12	685	662,10	698,81
65	318	0,25	1,22	2,56	669,90	746	681,13	746,00
65	393	0,25	1,50	2,62	684,96	701	688,05	806,98

85	85	0,33	0,33	2,41	630,84	620	581,19	581,19
85	128	0,33	0,49	2,60	680,57	684	622,15	621,04
85	153	0,33	0,59	2,65	693,38	719	643,26	643,59
85	233	0,33	0,89	2,77	723,11	744	698,89	713,20
85	306	0,33	1,17	2,84	743,59	773	734,64	773,84
85	376	0,33	1,44	2,91	760,22	818	754,73	829,87
85	445	0,33	1,70	2,96	774,74	798	757,72	883,38
105	105	0,40	0,40	2,66	695,47	682	641,70	641,70
105	167	0,40	0,64	2,91	760,58	778	697,16	696,03
105	205	0,40	0,78	2,98	778,16	786	725,97	728,28
Continuación tabla 28					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
105	268	0,40	1,02	3,06	801,04	805	765,84	780,24
105	270	0,40	1,03	3,07	801,68	863	766,95	781,86
105	334	0,40	1,28	3,14	820,60	824	797,31	832,92
105	356	0,40	1,36	3,16	826,47	840	805,40	850,12
105	415	0,40	1,59	3,22	841,06	822	820,65	895,48
125	125	0,48	0,48	2,89	756,27	725	699,35	699,35
125	187	0,48	0,72	3,16	826,35	824	753,42	751,49
125	239	0,48	0,91	3,26	851,31	860	791,46	793,87
125	293	0,48	1,12	3,33	871,64	863	824,50	836,75
125	362	0,48	1,38	3,42	893,30	897	857,31	890,06
125	414	0,48	1,58	3,47	907,59	941	874,81	929,28
125	463	0,48	1,77	3,52	919,91	918	885,02	965,55
125	516	0,48	1,97	3,57	932,27	886	888,02	1004,11
145	253	0,55	0,97	3,49	912,64	883	841,16	841,35
145	296	0,55	1,13	3,56	930,64	927	868,52	874,67
145	324	0,55	1,24	3,60	940,99	923	884,30	896,06
145	349	0,55	1,33	3,63	949,57	922	897,03	914,95
145	392	0,55	1,50	3,68	963,17	1015	915,91	947,03
145	410	0,55	1,57	3,70	968,51	1002	922,65	960,32
145	455	0,55	1,74	3,75	981,12	952	936,37	993,18

➤ **Caliza de Solnhofen (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -47,00 \text{ MPa} , \sigma_c = 310 \text{ MPa} \quad \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,080 , b = 0,088 \text{ (Yu)}$$

$$k_1 = 0,563, k_2 = 2,349, k_3 = k_1 = 0,563, m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| = 7 , s = 1 , a = 0,50$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	21,37 MPa	66,27 MPa	26,34 MPa

Tabla 29.

Caliza de Solnhofen

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0	0	1,00	310,00	310	310,00	310,00
20	20	0,06	0,06	1,21	376,26	397	390,13	390,13
20	51	0,06	0,16	1,30	401,93	417	424,31	399,51
20	92	0,06	0,30	1,34	415,38	413	462,26	411,74
20	165	0,06	0,53	1,39	431,78	453	512,71	433,03
20	206	0,06	0,66	1,42	439,14	460	532,00	444,73
20	233	0,06	0,75	1,43	443,55	465	540,96	452,34
40	40	0,13	0,13	1,40	434,75	449	461,77	461,77
40	40	0,13	0,13	1,40	434,75	446	461,77	461,77
40	80	0,13	0,26	1,51	467,98	486	502,44	472,79
40	113	0,13	0,36	1,55	479,64	499	531,18	481,79
40	193	0,13	0,62	1,61	499,74	530	585,29	503,22
40	274	0,13	0,88	1,66	515,12	547	618,46	524,44
40	315	0,13	1,02	1,68	521,88	535	625,94	535,00
60	60	0,19	0,19	1,57	488,07	473	527,74	527,74
60	87	0,19	0,28	1,67	518,34	517	554,60	534,69
60	102	0,19	0,33	1,70	525,83	537	568,38	538,53
60	113	0,19	0,36	1,71	530,48	530	578,01	541,33
60	164	0,19	0,53	1,77	547,48	576	617,66	554,24
60	197	0,19	0,64	1,79	556,26	550	639,22	562,51
60	275	0,19	0,89	1,85	573,50	553	677,76	581,81
60	345	0,19	1,11	1,89	586,43	557	696,48	598,86
80	80	0,26	0,26	1,73	537,60	528	589,58	589,58

80	126	0,26	0,41	1,87	580,65	572	632,22	600,74
80	150	0,26	0,48	1,91	590,71	577	651,93	606,51
80	208	0,26	0,67	1,97	609,42	647	693,08	620,36
80	225	0,26	0,73	1,98	614,04	591	703,48	624,39
80	283	0,26	0,91	2,03	628,04	677	733,41	638,04
80	298	0,26	0,96	2,04	631,32	665	739,73	641,54
80	378	0,26	1,22	2,09	647,18	650	762,83	660,08
80	454	0,26	1,46	2,13	660,36	680	764,68	677,45
105	293	0,34	0,95	2,23	690,71	711	797,45	705,00
105	577	0,34	1,86	2,41	746,37	727	822,04	766,96

➤ **Mármol de Yamaguchi (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -7,00 \text{ MPa} , \sigma_c = 82 \text{ MPa} , \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,085 , b = 0,389 \text{ (Yu)}$$

$$k_1 = 0,723 , k_2 = 3,211 , k_3 = k_1 = 0,723 , m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \approx 12 , s = 1 , a = 0,50 ,$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	39,37 MPa	14,58 MPa	27,48 MPa

Tabla 30.

Mármol de Yamaguchi

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0,00	0,00	0,00	1,00	82,00	82	82,00	82,00
6	6,00	0,07	0,07	1,39	114,25	118	117,75	117,75
12,5	12,50	0,15	0,15	1,74	142,51	140	149,36	149,36
12,5	26,00	0,15	0,32	1,88	154,24	179	166,27	165,83
12,5	28,00	0,15	0,34	1,89	155,08	177	168,51	168,18
12,5	45,00	0,15	0,55	1,96	160,71	196	185,40	187,38
12,5	67,00	0,15	0,82	2,03	166,08	213	202,12	210,54

12,5	90,00	0,15	1,10	2,08	170,62	225	213,88	233,20
12,5	105,00	0,15	1,28	2,11	173,22	228	218,13	247,31
12,5	115,00	0,15	1,40	2,13	174,83	200	219,14	256,46
25	25,00	0,30	0,30	2,29	187,64	189	200,32	200,32
25	39,00	0,30	0,48	2,47	202,94	209	215,74	214,68
25	58,00	0,30	0,71	2,57	211,13	240	233,41	233,30
25	78,00	0,30	0,95	2,65	217,41	252	248,54	252,00
25	107,00	0,30	1,30	2,74	224,67	275	264,68	277,79
25	132,00	0,30	1,61	2,80	229,94	268	272,87	299,00
25	157,00	0,30	1,91	2,86	234,62	268	274,48	319,43
25	168,00	0,30	2,05	2,88	236,54	250	272,26	328,20
40	40,00	0,49	0,49	2,85	233,34	243	252,48	252,48
40	64,00	0,49	0,78	3,14	257,62	290	275,64	273,90
Continuación tabla 30					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c
40	88,00	0,49	1,07	3,26	267,68	288	294,57	294,43
40	88,00	0,49	1,07	3,26	267,68	309	294,57	294,43
40	112,00	0,49	1,37	3,36	275,40	319	309,72	314,21
40	143,00	0,49	1,74	3,46	283,64	307	323,84	338,82
40	160,00	0,49	1,95	3,51	287,64	336	328,82	351,93
40	177,00	0,49	2,16	3,55	291,35	321	331,56	364,80
40	208,00	0,49	2,54	3,63	297,58	341	329,07	387,70
55	107,00	0,67	1,30	3,84	314,85	369	342,08	340,78
55	138,00	0,67	1,68	3,97	325,66	388	360,52	364,44
55	167,00	0,67	2,04	4,07	334,04	390	373,11	385,90
55	200,00	0,67	2,44	4,17	342,35	396	381,49	409,63
55	231,00	0,67	2,82	4,26	349,32	390	382,28	431,33
70	181,00	0,85	2,21	4,61	377,68	454	415,19	423,36
70	214,00	0,85	2,61	4,72	386,97	464	425,56	446,11
70	243,00	0,85	2,96	4,81	394,28	440	429,68	465,67
70	268,00	0,85	3,27	4,88	400,11	462	428,54	482,23
85	238,00	1,04	2,90	5,26	431,21	535	468,78	487,82
85	274,00	1,04	3,34	5,38	440,77	537	473,74	511,13

➤ **Traquita de Mizuho (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -7,00 \text{ MPa} , \sigma_c = 100,00 \text{ MPa} , \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,070 , b = 0,136 \text{ (Yu)}$$

$$k_1=0,765, \quad k_2=3,577, \quad k_3= k_1=0,765, \quad m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \approx 14, \quad s=1, \quad a=0,50,$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	28,03 MPa	58,62 MPa	39,14 MPa

Cabe señalar que a través de la Tabla N° (31), se aprecia que para el caso particular en el cual $\sigma_3 = \sigma_2 = 100,00$ MPa, la tensión principal mayor $\sigma_1 = 437,00$ MPa. Como previamente se ha indicado la referida tensión puede calcularse empleando la expresión $\sigma_1 \approx (k_1 + k_2) \sigma_c = 434,00$ MPa

Es decir, cuando:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_c} = \frac{\sigma_2}{\sigma_c} = 1, \quad \sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_c \quad \text{y} \quad (\sigma_1/\sigma_c) \approx (k_1 + k_2)$$

Dicho resultado prácticamente coincide con la prueba experimental de Mogi [9] para la condición arriba indicada y cuyo resultado se muestra en la tabla (31). Sin embargo, si se incluye el parámetro $\xi = (\sigma_t/\sigma_c) = -0,070$ en la ecuación (34):

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2}, \quad \text{resultando:}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 (1 - \xi) + k_2 (1 - \xi)^{1/2} = 4,52$$

En conclusión al comparar los resultados experimentales con el criterio de rotura propuesto, se ha determinado que el cociente $(\sigma_1/\sigma_c) \approx (k_1 + k_2)$, para el caso particular que $(\sigma_3/\sigma_c = \sigma_2/\sigma_c) = 1$.

Tabla 31.

Traquita de Mizuho

ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
------	-----------------	-------	----

σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0	0	1,00	100,00	100	100,00	100,00
15	15	0,15	0,15	1,85	184,62	196	192,28	192,28
30	30	0,3	0,3	2,46	245,91	259	259,91	259,91
45	45	0,45	0,45	2,98	297,75	302	317,55	317,55
45	58	0,45	0,58	3,18	317,65	314	331,93	323,16
45	67	0,45	0,67	3,24	323,64	327	341,18	327,00
45	90	0,45	0,9	3,35	334,78	341	362,47	336,70
45	138	0,45	1,38	3,51	350,98	350	397,39	356,43
45	204	0,45	2,04	3,67	367,35	359	425,65	382,56
45	281	0,45	2,81	3,83	382,54	368	419,38	411,80
45	323	0,45	3,23	3,90	389,78	353	343,71	427,27
60	60	0,6	0,6	3,44	344,08	341	369,38	369,38
60	83	0,6	0,83	3,74	374,13	350	392,58	378,42
Continuación tabla 31					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c
60	133	0,6	1,33	3,98	397,61	386	433,53	397,66
60	186	0,6	1,86	4,14	414,41	401	464,55	417,50
60	212	0,6	2,12	4,21	421,33	403	475,22	427,04
60	254	0,6	2,54	4,31	431,35	401	485,42	442,21
60	306	0,6	3,06	4,42	442,35	381	482,25	460,60
75	75	0,75	0,75	3,87	386,69	368	417,26	417,26
75	108	0,75	1,08	4,27	426,50	405	448,29	429,35
75	147	0,75	1,47	4,45	445,50	415	478,72	443,41
75	210	0,75	2,1	4,67	467,22	438	515,19	465,61
75	279	0,75	2,79	4,86	485,68	440	536,83	489,30
75	318	0,75	3,18	4,95	494,73	430	538,73	502,42
75	363	0,75	3,63	5,04	504,31	452	526,65	517,35
100	100	1	1	4,52	451,92	437	490,97	491,00
100	126	1	1,26	4,92	492,29	463	514,48	499,72
100	171	1	1,71	5,19	518,63	493	549,25	514,69
100	256	1	2,56	5,51	550,81	497	596,48	542,37
100	354	1	3,54	5,78	578,10	522	619,65	573,42
100	384	1	3,84	5,85	585,35	510	618,10	582,76

Adicionalmente, con el objeto de poder apreciar la forma de la superficie de rotura , la figura (28) representa la función $F(\sigma_3/\sigma_c, \sigma_2/\sigma_c, \sigma_1/\sigma_c)=0$

aplicando el criterio de rotura de Úcar y considerando los datos indicados en la tabla 31 , correspondientes a la ***Traquita de Mizuho***.

➤ ***Andesita de Manazuru (Roca Intacta)***

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -3,75 \text{ MPa}, \sigma_c = 140,00 \text{ MPa} , \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,0267 , b = 0,240 \text{ (Yu)}$$

$$k_1 = 0,900, k_2 = 5,963, k_3 = k_1 = 0,900, m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \approx 37, s = 1, a = 0,50$$

<i>Error Estándar</i>	Úcar	Zhang	Yu
Se	54,47 MPa	162,49 MPa	58,39 MPa

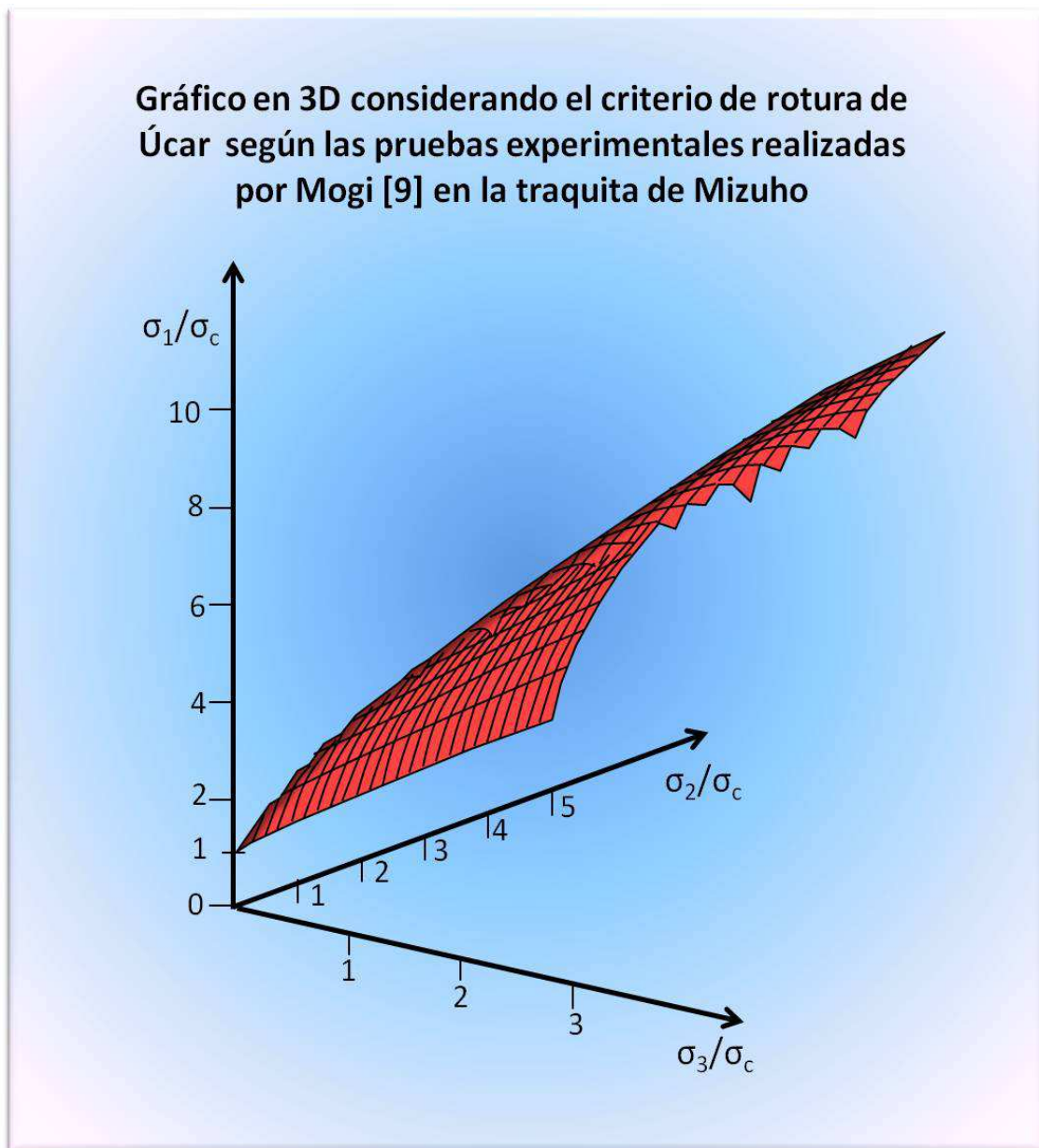


Figura 28. Superficie de rotura aplicando el criterio propuesto en el presente libro. Se han utilizado los valores experimentales obtenidos por Mogi [9], los cuales se indican en la tabla 31.

Tabla 32.

Andesita de Manazuru

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0,00	0,00	1,00	140,00	140	140,00	140,00
16	16	0,11	0,11	2,37	331,33	349	337,29	337,29
20	20	0,14	0,14	2,61	365,22	364	372,33	372,33
20	20	0,14	0,14	2,61	365,22	381	372,33	372,33
20	67	0,14	0,48	2,82	395,30	470	466,33	443,51
20	124	0,14	0,89	2,93	409,97	516	551,59	519,17
20	186	0,14	1,33	3,01	421,76	538	621,94	592,77
40	40	0,29	0,29	3,61	506,06	552	518,19	518,19
40	75	0,29	0,54	3,87	541,30	577	578,25	560,70
40	112	0,29	0,80	3,98	556,60	632	632,56	603,12
40	126	0,29	0,90	4,01	561,30	669	651,15	618,59
40	206	0,29	1,47	4,16	582,80	653	740,88	702,07
40	278	0,29	1,99	4,27	597,95	626	801,57	771,46
70	70	0,50	0,50	4,80	672,30	671	685,15	690,86
70	101	0,50	0,72	5,11	715,36	735	736,50	721,66
70	152	0,50	1,09	5,30	742,33	735	802,42	770,37
70	193	0,50	1,38	5,41	758,07	808	848,63	808,00
70	275	0,50	1,96	5,59	783,03	812	926,09	879,84
70	313	0,50	2,24	5,66	792,86	801	955,95	911,79
70	375	0,50	2,68	5,77	807,37	833	996,94	962,38
100	100	0,71	0,71	5,80	812,06	806	836,39	836,39
110	110	0,79	0,79	6,11	854,90	875	881,06	881,06
130	130	0,93	0,93	6,69	936,39	881	966,10	966,10

➤ **Granito de Inada (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -7,20, \sigma_c = 229,00 \text{ MPa}, \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,0314, b = 0,179 \text{ (Yu)}$$

$$k_1 = 0,884, k_2 = 5,483, k_3 = k_1 = 0,884, m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \approx 32, s = 1, a = 0,50,$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	63,86 MPa	69,04 MPa	41,37 MPa

Tabla 33.**Granito de Inada**

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0,00	0,00	1,00	229,00	229	229,00	229,00
20	20	0,09	0,09	1,99	456,78	508	465,10	465,10
20	44	0,09	0,19	2,09	479,38	556	521,67	497,62
20	46	0,09	0,20	2,10	480,31	611	526,03	500,25
20	74	0,09	0,32	2,14	490,68	643	582,56	535,97
20	101	0,09	0,44	2,18	498,30	524	630,61	568,66
20	127	0,09	0,55	2,20	504,51	607	672,16	598,78
40	40	0,17	0,17	2,67	611,78	692	626,33	626,33
40	63	0,17	0,28	2,80	640,93	722	671,26	651,12
40	88	0,17	0,38	2,86	653,89	743	715,64	677,26
40	120	0,17	0,52	2,91	666,14	802	766,99	709,61
40	142	0,17	0,62	2,94	673,16	760	799,32	731,20
40	174	0,17	0,76	2,98	682,13	791	842,65	761,75
70	70	0,31	0,31	3,48	797,30	834	819,86	819,86
70	70	0,31	0,31	3,48	797,30	841	819,86	819,86
100	100	0,44	0,44	4,17	953,88	1003	983,62	983,62
100	100	0,44	0,44	4,17	953,88	1023	983,62	983,62
100	138	0,44	0,60	4,41	1010,35	1046	1039,19	1012,86
100	148	0,44	0,65	4,44	1017,34	1037	1053,02	1020,45
Continuación tabla 33					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU

σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c
100	199	0,44	0,87	4,56	1045,02	1083	1119,00	1058,57
100	239	0,44	1,04	4,64	1061,88	1141	1166,00	1087,80
100	291	0,44	1,27	4,72	1080,48	1125	1221,65	1125,00
100	336	0,44	1,47	4,78	1094,60	1131	1265,28	1156,51
150	150	0,66	0,66	5,15	1179,34	1138	1220,03	1220,03
150	164	0,66	0,72	5,33	1220,84	1198	1238,69	1229,36
150	195	0,66	0,85	5,47	1253,75	1223	1278,34	1249,87
150	215	0,66	0,94	5,54	1268,77	1279	1302,77	1262,98
150	273	0,66	1,19	5,69	1302,36	1316	1368,98	1300,48
150	309	0,66	1,35	5,76	1319,21	1332	1406,91	1323,40
150	317	0,66	1,38	5,78	1322,68	1342	1415,03	1328,46
150	365	0,66	1,59	5,86	1341,98	1275	1461,52	1358,54
150	365	0,66	1,59	5,86	1341,98	1307	1461,52	1358,54
200	200	0,87	0,87	6,02	1377,61	1362	1428,47	1428,47
200	216	0,87	0,94	6,24	1428,55	1425	1448,08	1438,08
200	233	0,87	1,02	6,34	1450,76	1441	1468,39	1448,24
200	281	0,87	1,23	6,52	1492,22	1545	1522,97	1476,70
200	383	0,87	1,67	6,77	1549,88	1554	1626,83	1536,03
200	439	0,87	1,92	6,88	1574,48	1587	1677,58	1568,00
230	230	1,00	1,00	6,50	1487,69	1497	1544,40	1544,40

➤ **Momzonita de Orikabe (Roca Intacta)**

Parámetros utilizados

$$\sigma_t = -11,00, \sigma_c = 234,00 \text{ MPa} \quad , \quad \xi = -\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right) = -0,047, \quad b = 0,299 \text{ (Yu)}$$

$$k_1 = 0,883, \quad k_2 = 4,431, \quad k_3 = k_1 = 0,883, \quad m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| \approx 21, \quad s = 1, \quad a = 0,50$$

Error Estándar	Úcar	Zhang	Yu
Se	93,72 MPa	62,75 MPa	59,18 MPa

Tabla 34

Momzonita de Orikabe

					ÚCAR	ENSAYOS MOGI	ZHANG	YU
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)
0	0	0,00	0,00	1,00	234,00	234	234,00	234,00
5	5	0,02	0,02	1,22	284,49	339	287,21	287,21
20	20	0,09	0,09	1,72	403,28	504	412,83	412,83
40	40	0,17	0,17	2,25	526,64	585	543,85	543,85
40	59	0,17	0,25	2,36	552,60	636	575,43	569,43
40	80	0,17	0,34	2,41	564,31	698	607,47	596,75
40	101	0,17	0,43	2,45	573,16	673	636,96	623,18
40	102	0,17	0,44	2,45	573,54	775	638,30	624,42
40	121	0,17	0,52	2,48	580,24	739	662,97	647,62
40	143	0,17	0,61	2,51	587,09	747	689,52	673,76
40	168	0,17	0,72	2,54	594,03	777	717,30	702,61
40	187	0,17	0,80	2,56	598,85	748	736,86	723,99
80	80	0,34	0,34	3,09	722,55	718	753,04	753,04
80	80	0,34	0,34	3,09	722,55	742	753,04	753,04
80	80	0,34	0,34	3,09	722,55	794	753,04	753,04
80	95	0,34	0,41	3,22	753,37	834	773,92	769,17
80	108	0,34	0,46	3,27	764,65	810	791,27	782,97
80	117	0,34	0,50	3,29	770,95	836	802,91	792,42
80	135	0,34	0,58	3,34	781,56	854	825,29	811,10
80	147	0,34	0,63	3,37	787,68	893	839,61	823,39
80	182	0,34	0,78	3,43	802,91	889	878,78	858,55
80	183	0,34	0,78	3,43	803,30	930	879,84	859,55
80	216	0,34	0,92	3,48	815,34	906	913,46	891,81
80	218	0,34	0,93	3,49	816,02	973	915,41	893,75
80	281	0,34	1,20	3,57	835,35	926	971,52	953,23
80	284	0,34	1,21	3,57	836,19	956	973,95	956,00
80	311	0,34	1,33	3,60	843,48	966	994,92	980,72
140	140	0,60	0,60	4,10	958,93	943	1006,98	1006,98
140	140	0,60	0,60	4,10	958,93	981	1006,98	1006,98
140	205	0,60	0,88	4,45	1041,56	1098	1080,81	1063,98
140	259	0,60	1,11	4,58	1070,74	1144	1134,93	1109,92
140	331	0,60	1,41	4,70	1100,58	1161	1198,24	1169,40
140	424	0,60	1,81	4,84	1131,65	1168	1266,52	1243,60
200	200	0,85	0,85	4,96	1160,66	1107	1224,85	1224,85
200	235	0,85	1,00	5,27	1232,33	1168	1262,42	1252,34
200	251	0,85	1,07	5,33	1247,18	1244	1278,84	1264,79
200	298	0,85	1,27	5,47	1280,60	1305	1324,52	1300,94
200	343	0,85	1,47	5,58	1305,54	1352	1364,91	1335,01
Continuación tabla 34					ÚCAR	ENSAYOS	ZHANG	YU

					MOGI			
σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c
200	401	0,85	1,71	5,69	1332,43	1329	1412,46	1378,19
200	473	0,85	2,02	5,82	1360,84	1358	1464,85	1430,74
200	537	0,85	2,29	5,91	1383,07	1364	1505,51	1476,54

3.5. CRITERIO DE ROTURA PARA UN ESTADO DE ESFUERZO POLIAXIAL EN MACIZOS ROCOSOS

Para completar el presente capítulo a continuación se investiga la resistencia en macizos rocosos para un estado poliaxial de tensiones, en el cual $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Por otra parte, al utilizar la ecuación (154) y teniendo en cuenta la calidad de roca en función de RMR, es posible escribir:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right)^{1/2} + k_3 \left\{ \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \right\}^{1/2} \quad (191)$$

Como se sabe, al considerar la referida condición de tensiones, a la prueba experimental se le conoce como ensayo triaxial verdadero (True Triaxial Test), por cuanto en el ensayo convencional $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$.

Teniendo en cuenta la sección 2.2 y utilizando nuevamente las ecuaciones (147), (138), (139) y (145) a continuación se adjunta el siguiente cuadro resumen para determinar los parámetros involucrados en la rotura del macizo rocoso y por tanto la tensión principal mayor σ_1 en el instante de la rotura.

Cuadro 10. Parámetros involucrados en el criterio de rotura de Úcar para un estado poliaxial de tensiones en función de la calidad de la roca

$$k_1 = \frac{-(\eta_m + |\xi_m|) + \sqrt{\eta_m^2 + 6\eta_m \cdot |\xi_m| - 7\xi_m^2}}{2|\xi_m|}$$

$$\eta_m = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \right) \approx \exp\left(\frac{RMR - 100}{a_c} \right) \Rightarrow \sigma_{cm} = \eta_m \cdot \sigma_c$$

$$18,75 \leq a_c \leq 24$$

$$\xi_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) \approx \xi \cdot \exp\left(\frac{RMR - 100}{14} \right), \quad \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)$$

$$k_2 = \frac{[\eta_m - k_1(-\xi_m)]}{\sqrt{-\xi_m}}, \text{ adicionalmente } \Rightarrow k_3 = k_1$$

A continuación se comparan los valores de la tensión principal mayor σ_1 utilizando el criterio de rotura indicado en la ecuación (189) y el cuadro 1, con la ecuación (181) propuesta por Zhang [20]. Se observa que este último criterio incluye la tensión octaédrica.

Los parámetros utilizados son los siguientes:

$$RMR=GSI=50, \sigma_c = 140,00 \text{ MPa}, \sigma_t = -3,75 \text{ MPa}, a_c = 18,75$$

$$\eta_m = 0,0695, \quad \xi = (\sigma_t / \sigma_c) = -0,0268, \quad \xi_m = -0,00754.$$

$$k_1 = k_3 = 0,958, \quad k_2 = 2,056$$

Parámetros de Hoek y Brown:

$$a=0,5056, m_i=37, m=6, s=0,00387$$

A través de la tabla adjunta, se observa que los valores de σ_1 son muy cercanos entre ambos criterios teniendo en cuenta los estados tensionales:

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \text{ y } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Tabla 35.

				CRITERIO DE ÚCAR		CRITERIO DE ZHANG	
σ_3 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3/σ_c	σ_2/σ_c	σ_1/σ_c	σ_1 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_1/σ_c
0	0	0,00	0,00	0,07	9,73	8,43	0,06
16	16	0,11	0,11	0,96	134,41	134,51	0,96
20	20	0,14	0,14	1,09	152,20	152,60	1,09
20	67	0,14	0,48	1,30	181,65	198,48	1,42
20	124	0,14	0,89	1,40	196,00	217,56	1,55
40	40	0,29	0,29	1,62	226,17	228,06	1,63
40	75	0,29	0,54	1,87	262,07	260,63	1,86
40	112	0,29	0,80	1,98	277,65	284,55	2,03
40	126	0,29	0,90	2,02	282,44	291,00	2,08
40	206	0,29	1,47	2,17	304,34	290,28	2,07
70	70	0,50	0,50	2,25	315,40	319,47	2,28
70	101	0,50	0,72	2,57	360,06	345,99	2,47
70	152	0,50	1,09	3,10	388,03	378,31	2,70
70	193	0,50	1,38	2,89	404,35	394,59	2,82
70	275	0,50	1,96	3,07	430,24	393,13	2,81
70	313	0,50	2,24	3,15	440,43	351,84	2,51
100	100	0,71	0,71	2,80	392,53	398,72	2,85
110	110	0,79	0,79	2,98	416,57	423,46	3,02
130	130	0,93	0,93	3,31	462,81	471,07	3,36

Sin lugar a dudas, los criterios de rotura de Zhang [20] y Yu [6] para un estado poliaxial de tensiones considerando los parámetros resistentes de Hoek y Brown (HB) son de gran relevancia; en especial en el diseño de

obras subterráneas, en las excavaciones a cielo abierto y en la estabilidad de hoyos en la industria petrolera.

Sin embargo, sus contribuciones no han tenido la difusión esperada al igual que las ecuaciones desarrolladas por Kumar [28] para determinar bidimensionalmente la tensión normal y la resistencia al corte empleando las ecuaciones que vinculan las tensiones principales a través del referido criterio de falla de HB.

REFERENCIAS

1. HOEK, E Y BROWN, T., (1989).: "The Hoek-Brown failure criterion-a 1988 updated in Rock engineering for undergrounds excavations, pro.15th Canadian rock mech". Symp (ed.J.C. Curran), 31-38. Toronto: Dept. Civil. Engineering, University of Toronto.
2. BIENIAWSKI, T., (1989).: "Engineering Rock Mechanics Classifications". John Wiley & Sons, 251p.
3. BARTON, N., (2002).: "Some New Q-value correlations to assist in site characterization and tunnel design". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 39, No2, pp185-216.
4. RAMAMURTHY, T., (1986).: "Stability of rock mass". Indian Geotechnical Journal, Vol 16, No1, 74p.
5. PALMSTRÖM, A., (1995).: "RMi - a rock mass characterization system for rock engineering purposes". P.H.D, thesis, University of Oslo (www.rockmass.net).
6. YU, MH., (2003).: "Unified Strength Theory and its Applications". Springer, 412p.
7. SHEORY, P., (1997).: "Empirical Rock Failure Criteria". A.A. Balkema, 176p.
8. ANDREEV, G., (1995).: "Brittle Failure of Rocks Materials". A.A. Balkema, 446p.
9. MOGI, K., (1971).: "Fracture and flow of rocks under triaxial compression". Journal of Geophysical Research.76(5), pp 1255-1269.

- 10.ÚCAR, R., (2011).: "Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos". Proceedings of PanAm CGS Geotechnical Conference, Volumen 3, pp 2694-2700, Toronto, Canadá.
- 11.TORRES, R., (1992).: "Nuevos criterios sobre la resistencia del hormigón". Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes ,160p más anexos.
- 12.AVELLAN, A., y SZARVAS, J. (1995).: "Técnicas para el Estudio de Datos Experimentales". 134p, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.
- 13.AIRE, C., (2002).: "Estudio experimental del comportamiento del hormigón confinado sometido a compresión". Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Capitulo 3, pp 21-45.
- 14.CHEN, W. F., (1982).: "Plasticity in reinforced concrete". McGraw-Hill Book company, 474p.
- 15.WANG CHUAN-ZHI, GUM ZHEN-HAI y ZHANG XIU-QIN. (1987).: "Experimental investigation of biaxial and triaxial Compressive concrete strength". ACI Materials Journal, Title No 84-M11, pp 92-100.
- 16.MURRELL, S.A., (1965).:"The effect of triaxial stress system on the strength of rocks at atmospheric temperatures". Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society, Volume 10, pp 231-281.
- 17.BIENIAWSKI, Z.T., (1974).: "Estimating the strength of rock materials". Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 74, number 8, pp 312-320.
- 18.ÚCAR, R., (1988).: "New design methods for ground engineering". PhD thesis, Mc Gill University, Montreal, Canada, 288p.
- 19.AUBERTIN, M., y SIMON, L., (2000).: "A multiaxial stress criterion for short-and long-term strength of isotropic rock media". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 37, pp 1169-1193.
- 20.ZHANG, L., (2010).: "Estimating the Strength of Jointed Rock". Rock mechanics and Rock Engineering, Vol43, No 4, pp 391-402.

21. HOEK, E., y BROWN, T., (1997).: "Practical estimates of rock mass strength". Int. J. Rock.Mech.Min Sci. Vol 34, No 8, pp 1165-1186.
22. KALAMARAS, G.S., y BIENIAWSKI, Z.T., (1995).: "A rock strength concept for coal seams incorporating the effect of time". Proceedings of the Eighth International Congress of Rock Mechanics, Vol.1, pp 295-302.
23. SINGH, B., y GOEL, R., (2006).: "Tunneling in Weak Rock". Geo - Engineering Book Series, Volume 5, Elsevier, 489p.
24. MEHROTRA, V., (1992).: "Estimation of engineering parameters of rock mass". PhD thesis, University of Roorkee, India, 267p.
25. PRIEST, S (2005).: "Determination of Shear Strength and Three-dimensional Yield Strength for the Hoek-Brown Criterion" ,Rock Mechanics and Rock Engineering, 38(4):pp 299-327.
26. PAN, X.D y HUDSON, J.A (1988). "A simplified three dimensional Hoek and Brown yield criterion" In: Romana, M (Ed) Rock Mechanics and Power Plants, Balkema, Rotterdam, pp 95-103.
27. LADE, P.V (1993). "Rock strength criteria: The theories and the evidence". In: Hudson J.A (Ed), Comprehensive Rock Engineering - Principle, Practice and Projects, Vol 1, Pergamon Oxford, pp255-284.
28. KUMAR, P., (1998).: "Shear failure envelope of Hoek-Brown criterion for rock mass". Tunnelling12 and Underground Space Technology, Volume 13, number 4, pp 453-458.

APÉNDICE A DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Al Profesor J.A. Marín Tejerizo, por su excelente contribución en la enseñanza del análisis matemático que hábilmente supo transmitir a través de sus textos, así como en sus obras de problemas de cálculo integral y diferencial.

I. INTRODUCCIÓN

En este primer apéndice se desea describir un tema de gran interés y de amplia aplicación por matemáticos, físicos e ingenieros como es la determinación de la envolvente de una familia de curvas dependiente de un parámetro.

Boltianski [1] explica en forma amena empleando ejemplos sencillos el concepto de envolvente a través de curvas notables basándose en la mecánica del movimiento de los cuerpos. Parte de su libro "*La Envolvente*",

corresponde a las conferencias que dictaba a estudiantes vinculados con la Universidad Estatal de Moscú.

Adicionalmente, la relevancia del tema se manifiesta en esta obra al determinarse la envolvente de rotura empleando una ecuación cuadrática entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 .

Igualmente, en los siguientes apéndices se lleva cabo el cálculo de la envolvente obtenida por Úcar [2] aplicando el criterio de rotura propuesto por Murrell [3] y el original de Hoek y Brown [4].

2. DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE

Existen gran variedad de obras que explican los procedimientos matemáticos para determinar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas, pudiéndose mencionar a Navarro y Ríos [5], Palacio Gros [6] y Marín Tejerizo [7] entre otros.

Supóngase que la familia de curvas:

$$F(x, y, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Posee una envolvente (E), y en cada punto corresponderá un valor de (t) que determina la curva tangente a todas las de la familia de curvas.

Como lo mencionan Navarro y Ríos [5] al existir la curva tangente a todas las de la familia, se le llama envolvente de la familia de curvas; y sus puntos están en correspondencia biunívoca con los valores del parámetro (t) en su campo de variabilidad. Por otra parte, a las curvas de las de la familia se llaman involutas.

Lo anterior indica que la envolvente (E) puede ser representada paramétricamente, es decir:

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad \therefore (\text{contenido en A.1}) \quad (\text{A.2})$$

Por cuanto (A.1) y (A.2) deben ser tangentes, se obtiene:

Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)} \right) &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)} \\ F_x \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_y \left(\frac{dy}{dt} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

Por otra parte, como los puntos de la envolvente deben pertenecer a curvas de la familia (A.1), si la envolvente existe sus ecuaciones (A.2) verifican idénticamente la ecuación indicada en (A.1). Por lo tanto, para cualquier valor de (t) se tendrá:

$$F[\varphi(t), y=\psi(t), t] = 0 \quad (A.4)$$

Y por consiguiente:

$$F_x \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_y \left(\frac{dy}{dt} \right) + F_t = 0 \quad (A.5)$$

A la vez:

$$F_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} \right)$$

En estas condiciones a través de (A.4) y (A.5) los puntos de la envolvente deben satisfacer la ecuación:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (A.6)$$

Obteniéndose a través de las expresiones (A1) y (A.6), el sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (A.7)$$

Adicionalmente, debe verificarse que el Jacobiano:

$$J \equiv \frac{D(F, F_t)}{D(x, y)} \equiv \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{tx} & F_{ty} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.8})$$

Siendo las segundas derivadas:

$$F_{tx} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}, \quad F_{ty} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y}$$

3. UN EJEMPLO PRÁCTICO PARA DETERMINAR LA ENVOLVENTE

A continuación, a través de un ejemplo sencillo descrito por Marín Tejerizo [7], se determina la envolvente a una familia de circunferencias, cuyo procedimiento es el utilizado en esta investigación para determinar la nueva envolvente de rotura en macizos rocosos y el hormigón.

En resumen, si la familia de líneas planas $F(x, y, t) = 0$, admite envolvente, las funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, satisfacen por lo tanto el sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Considérese según [7] la ecuación $(x-t)^2 + y^2 - 2t + 1 = 0$, la cual representa una familia de circunferencias de radio variable, teniendo todas ellas (ver Fig. A.1) su centro en el eje OX . Al aplicar el sistema de ecuaciones indicado en (A.9), y derivando se obtiene que:

$$\left. \begin{aligned} (x-t)^2 + y^2 - 2t + 1 &= 0 \\ -2(x-t) - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Obteniéndose, por tanto, dos arcos

$$\left. \begin{array}{l} x = (t-1) \\ y = \sqrt{2(t-1)} \end{array} \right\} \quad (A.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = (t-1) \\ y = -\sqrt{2(t-1)} \end{array} \right\} \quad (A.12)$$

Suponiendo que $t \geq 1$, estos dos arcos forman la parábola $y^2 = 2x$, la cual es la envolvente a las circunferencias, que en este caso son las involutas.

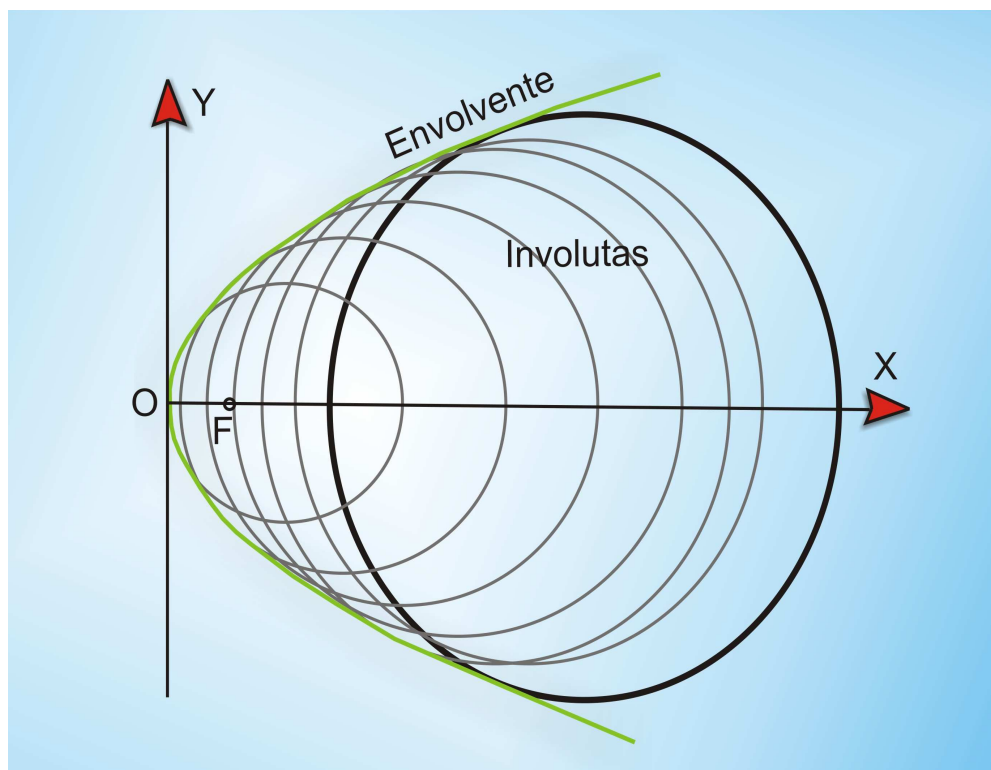


Figura A.1. Parábola envolvente a una familia de circunferencias.

4. REFERENCIAS

1. BOLTIANSKI, V. (1977).: "La Envolvente". Editorial Mir, Moscú. 88 p.
2. UCAR, R. (2003).: "Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos". Ingeniería del Terreno, Volumen 3, E.T.S.I Minas, Universidad Politécnica de Madrid, Editor Carlos López Jimeno, Madrid, pp 99-117.
3. MURRELL, S.A. (1965).: "The Effect if Triaxial Stress System in the Strength Rock at Atmospheric Temperatures". Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Volume 10, 1965, pp 231-281.
4. HOEK, E. y BROWN, T. (1980).: "Empirical Strength Criterion for Rock Masses". Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 106, No.GT9, Sept., 1980, pp 1013-1035.
5. NAVARRO, F y RÍOS. (1958).: "Análisis Matemático", Editorial Dossat, S. A, Madrid. 626 p.
6. PALACIO, A. (1959).: "Lecciones Sobre Curvas Planas y Alabeadas, y Teoría de Superficies", Editorial Palas. México, 599p.
7. MARÍN, J (1965).: "Ampliación de Matemáticas para Técnicos". Editorial S. A. E. T.A, Madrid, 770 p.

APÉNDICE B ESTUDIO DE LA CURVA DE ROTURA A TRAVÉS DE LA RELACIÓN QUE VINCULA LAS TENSIONES PRINCIPALES σ_1 y σ_3

I. INTRODUCCIÓN

En este apartado se investiga la sección cónica que corresponde a la ecuación que vincula $\sigma_1 = f(\sigma_3)$. Es decir, se quiere determinar el tipo de curva plana en coordenadas cartesianas representada por una ecuación de segundo grado.

Posteriormente, la ecuación cuadrática se expresa en forma ordinaria o canónica con la ventaja adicional que las constantes k_1 y k_2 se obtienen teniendo en cuenta la cuerda o ***latus rectum*** de la sección cónica.

Cabe señalar que a través de esta metodología de cálculo, las referidas constantes se obtienen sin necesidad de considerar como datos de entrada los valores (σ_3, σ_1) de los ensayos triaxiales.

2. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA DE ROTURA

Como previamente se ha indicado en la sección (2.2 del capítulo 2), la ecuación que relaciona los esfuerzos principales en el instante de la rotura del macizo rocoso está representada por:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right)^{1/2} \quad (\text{B.1})$$

A través de dicha expresión se observa que está representada en forma explícita, por cuanto es posible llevar a cabo una serie de operaciones a través de la variable independiente σ_3 para obtener directamente la variable dependiente σ_1 .

Por otra parte, el referido criterio de rotura se ha expresado en términos normalizados con respecto a σ_c , facilitando las operaciones matemáticas y evitando problemas con las unidades.

Considerando que,

$$\bar{y} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right), \quad \bar{x} = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \quad (\text{B.2})$$

La ecuación (B.1) se transforma:

$$\bar{y} = k_1 (\bar{x} - \xi_m) + k_2 (\bar{x} - \xi_m)^{1/2} \quad (\text{B.3})$$

Esta curva cuadrática, se puede también representar en forma implícita llevando a cabo las siguientes operaciones:

$$\left[\bar{y} - k_1 (\bar{x} - \xi_m) \right] = k_2 (\bar{x} - \xi_m)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y agrupando términos resulta:

$$\begin{aligned} k_1^2 \cdot \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (-2k_1) \bar{x} \cdot \bar{y} + (-2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 - K_2^2) \bar{x} + (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m) \bar{y} \\ + (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Se observa que dicha ecuación es una cónica, la cual se define como el lugar geométrico de los puntos del plano $(\bar{x}, \bar{y})$ que satisfacen una ecuación completa de segundo grado:

$$B \cdot \bar{x}^2 + C \cdot \bar{y}^2 + D \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + F \cdot \bar{x} + G \cdot \bar{y} + H = 0 \quad (\text{B.6})$$

Al comparar (B.5) y (B.6), se obtiene que:

$$\begin{aligned} B = k_1^2, \quad C = 1, \quad D = -2k_1, \quad F = (-2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 - k_2^2) \\ G = (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m), \quad H = (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2) \end{aligned}$$

Adicionalmente, la ecuación de la cónica también se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{00} = H, \quad a_{11} = B, \quad a_{22} = C, \quad a_{12} = a_{21} = D / 2 \\ a_{01} = a_{10} = F / 2, \quad a_{02} = a_{20} = G / 2 \end{aligned}$$

Por otra parte, el determinante de la matriz cuadrada es:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Siendo el menor del determinante de A, igual a $\det A_{ij}$ ($i=0, j=0$):

$$\det A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Si el $\det A \neq 0^1$, la ecuación cuadrática puede ser una elipse, una hipérbola o una parábola, debiéndose cumplir además que:

$$\det A_{00} > 0 \Rightarrow \text{signo}(\det A) \neq \text{signo}(a_{11} + a_{22}) \text{ Elipse real}$$

$$\det A_{00} < 0 \Rightarrow \text{Hipérbola}$$

$$\det A_{00} = 0 \Rightarrow \text{Parábola}$$

Teniendo en cuenta (B.6) y (B.7) los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \left(\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 \right), \quad a_{11} = k_1^2, \quad a_{22} = 1 \\ a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{2} (-2 \cdot k_1) = -k_1 \\ a_{01} &= a_{10} = \frac{1}{2} (-2 \cdot \xi_m^2 \cdot k_1^2 - k_2^2) \\ a_{02} &= a_{20} = \frac{1}{2} (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m) = k_1 \cdot \xi_m \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Por lo tanto,

¹La cónica es degenerada cuando el $\det A = 0$, y en este caso está formada por dos rectas (iguales o distintas, reales o imaginarias)

$$\det A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Es decir, la cónica investigada es una parábola.

Por otra parte, la condición para que la ecuación represente una parábola es que los términos de segundo grado formen un cuadrado perfecto.

En estas condiciones, la ecuación (B.5) se transforma:

$$(k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y})^2 + (-2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 - k_2^2) \bar{x} + (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m) \bar{y} + (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2) = 0 \quad (\text{B.12})$$

El próximo paso corresponde a determinar la forma ordinaria o canónica de la parábola, a través de un nuevo eje de coordenadas incorporando en (B.12) una constante arbitraria λ . De esta manera se logra que la ecuación de la cónica con respecto al nuevo sistema de referencia pueda expresarse en la forma más sencilla posible.

Al considerar dicha constante en (B.12) resulta:

$$\begin{aligned} (k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda)^2 &= (2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \lambda) \bar{x} - (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m + 2 \cdot \lambda) \bar{y} \\ &\quad - (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

La escogencia de λ debe ser tal que las rectas:

$$k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \lambda) \bar{x} - (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m + 2 \cdot \lambda) \bar{y} \\ - (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que,

$$\alpha = (2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \lambda) \text{ y } \beta = (2 \cdot k_1 \cdot \xi_m + 2 \cdot \lambda)$$

La ecuación (B.15) se reduce en función de los términos siguientes:

$$\alpha \cdot \bar{x} - \beta \bar{y} - (\xi_m^2 \cdot k_1^2 - \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2) = 0 \quad (\text{B.16})$$

Adicionalmente, debe cumplirse la perpendicularidad entre ambas rectas. Por lo tanto, el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

Es decir,

$$k_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = -1 \quad (\text{B.17})$$

$$k_1 \cdot \left[\frac{2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot k_1 \cdot \lambda}{2 \cdot k_1 \cdot \xi_m + 2 \cdot \lambda} \right] = -1 \quad (\text{B.18})$$

Despejando λ se obtiene:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 (2 \cdot \xi_m \cdot k_1^2 + k_2^2 + 2 \cdot \xi_m)}{(1 + k_1^2)} \right] \quad (\text{B.19})$$

Al remplazar dicho parámetro en α y β , y luego de llevar a cabo simplificaciones, la ecuación (B16) se transforma:

$$(k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} [\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1] - (\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Que equivale a escribir:

$$(k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} \left\{ [\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1] - \left(\frac{\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2}{k_2^2} \right) (1 + k_1^2) \right\} = 0 \quad (\text{B.21})$$

Adicionalmente, a través de la ecuación anterior se ha considerado que:

$$b = \left(\frac{\xi_m^2 \cdot k_1^2 + \xi_m \cdot k_2^2 - \lambda^2}{k_2^2} \right) (1 + k_1^2) \quad (\text{B.22})$$

Por lo tanto, la ecuación (B.21), se reduce a la forma siguiente:

$$\left(k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda \right)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)} \left[(\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1) - b \right] = 0 \quad (\text{B.23})$$

Obteniéndose finalmente,

$$\left(\frac{k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right)^2 = \frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)^{3/2}} \left[\frac{(\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1) - b}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right] = 0 \quad (\text{B.24})$$

Es decir, el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\left. \begin{aligned} Y &= \left(\frac{k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right) \\ X &= \left[\frac{(\bar{x} + \bar{y} \cdot K_1) - b}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.25})$$

En estas condiciones, la forma ordinaria o canónica de la parábola está representada por la ecuación:

$$Y^2 = \left[\frac{k_2^2}{(1 + k_1^2)^{3/2}} \right] X \quad (\text{B.26})$$

Si p , es la abscisa del foco (F), se aprecia a través de (B.26) que:

$$\left[\frac{k_2^2}{(1+k_1^2)^{3/2}} \right] = 4p \quad (\text{B.27})$$

Por lo tanto, el foco tiene coordenadas $F(p,0)$ y la ecuación canónica de la parábola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$Y^2 = 4pX \quad (\text{B.28})$$

Finalmente, en función de (σ_3/σ_c) y σ_1/σ_c la ecuación (B.26) se transforma:

$$\left[\frac{k_1 \cdot \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) + \lambda}{\sqrt{1+k_1^2}} \right]^2 = \left(\frac{k_2^2}{(1+k_1^2)^{3/2}} \right) \left[\frac{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cdot k_1 - b}{\sqrt{1+k_1^2}} \right] = 0 \quad (\text{B.29})$$

El eje de simetría corresponde a $Y=0$, por lo tanto:

$$k_1 \cdot \bar{x} - \bar{y} + \lambda = 0 \quad (\text{B.30})$$

La tangente al vértice corresponde a $X=0$, resultando:

$$\bar{x} + \bar{y} \cdot k_1 - b = 0 \quad (\text{B.31})$$

El punto de intersección de ambas rectas es el vértice de la parábola referido al sistema original $(\bar{x}, \bar{y})$. En estas condiciones se obtienen las coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} = \bar{x}_v &= \left[\frac{b - \lambda \cdot k_1}{(1 + k_1^2)} \right] \\ \bar{y} = \bar{y}_v &= \lambda + k_1 \left[\frac{b - \lambda \cdot k_1}{(1 + k_1^2)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.32})$$

APÉNDICE C CRITERIOS EMPÍRICOS DE ROTURA

Al Dr. Kiyoo Mogi profesor emérito de la Universidad de Tokio como reconocimiento a su relevante trayectoria como investigador y aportes científicos en la predicción de terremotos cuyo propósito ha sido el de evitar o reducir pérdidas de vidas y daños materiales. También por su meritoria contribución en el desarrollo y difusión en el campo de la geomecánica a través de los ensayos de compresión poliaxial junto con el criterio de rotura en rocas (Mogi Failure Criterion).

I. INTRODUCCIÓN

Un criterio empírico de rotura permite determinar con la mayor precisión posible la resistencia de la roca a través de datos experimentales.

Por otra parte, se deben obtener los mejores valores de las constantes o parámetros incógnitas para cada roca en particular de la función escogida, de manera que la curva pase lo más cerca posible del conjunto de puntos obtenidos experimentalmente a través de los ensayos de tracción, compresión sin confinar y triaxial en núcleos de rocas intactas.

Este método analítico de ajuste de la curva es ampliamente utilizado y se conoce como el método de los mínimos cuadrados.

Sin embargo, cabe indicar que algunos de los criterios establecidos han buscado mecanismos para hallar la resistencia en rocas diaclasadas y meteorizadas.

Esto se ha logrado relacionando en forma aproximada las nuevas constantes involucradas en macizos rocosos fracturados y alterados por la acción de agentes externos, con los parámetros de la roca intacta previamente obtenidos mediante el ajuste de la curva y considerando adicionalmente los bien conocidos índices de calidad tales como el RMR, también denominado *Rock Mass Rating* de Bieniawski [1], el sistema Q de Barton [2] y el índice de resistencia geológica (*Geological Strength Index* (GSI) propuesto por Hoek y Brown [3]

De acuerdo a Edlbro [4], en la Tabla anexa se indican varios criterios empíricos de rotura en rocas propuesta por diferentes investigadores.

Tabla C.1. Resumen de los diferentes criterios de rotura en rocas, según Edlbro [4].

ECUACIÓN DE ROTURA	COMENTARIOS	AUTOR
$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = a + b(\sigma_1 + \sigma_3)$	Una generalización empírica de la teoría de Griffith de roca intacta	Fairhurst(1964)
$\sigma_1 = \sigma_c + \sigma_3 + F \cdot \sigma_3^f$	Ajuste de curva mediante datos experimentales en roca intacta	Hobbs(1964)
$\sigma_1 = \sigma_c + a \cdot \sigma_3^b$	Ajuste de curva mediante datos experimentales en roca intacta	Murrell (1965)
$\frac{\tau_m - \tau_0}{\sigma_c} = D \left \frac{\sigma_m}{\sigma_c} \right ^C$	Ajuste de curva mediante datos experimentales en roca intacta	Hoek(1968)
$\sigma_1 = \sigma_c + a \cdot \sigma_3$	Ensayo triaxial en roca blanda	Bodonyi(1970)
$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c^{(1-B)} (\sigma_1 + \sigma_3)^B$	Ajuste de curva ensayando 500 testigos de rocas	Franklin(1971)
$\sigma_1 = \sigma_3 + (m \cdot \sigma_c \cdot \sigma_3 + s \cdot \sigma_c^2)^{1/2}$	Aplicación de la teoría de Griffith ,y ajuste de curva en roca intacta y diaclasada	Hoek y Brown (1980)
$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = a + b \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^\alpha$	Ajuste de curva ensayando 700 testigos de roca intacta como diaclasada	Bieniawski (1974) Modificado por Yudhbir(1983)
$\sigma_1 = \sigma_3 + a \cdot \sigma_3 \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_3} \right)^b$	Aplicación utilizando 80 testigos de rocas	Ramamurthy et al (1985)

Continuación tabla C.1		
ECUACIÓN DE ROTURA	COMENTARIOS	AUTOR
$\sigma'_{1n} = \left(\frac{M}{B} \sigma'_{3n} + 1 \right)^B$	Ajuste de curva para suelos y roca	Johnston(1985)
$\sigma_1 = \sigma_c \cdot \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_t} \right)^b$	Aplicación en roca intacta y fracturada	Balmer (1952), Sheorey et al (1952)
$\sigma_1 = \sigma_3 + A \cdot \sigma_c \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - S \right)^{1/B}$	A, B y S parámetros de corte	Yoshida(1990)
$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left(m_b \cdot \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + S \right)^a$	Versión 2002	Hoek y Brown (1980)
$\sigma_1 = A \sigma_{ci} + B \cdot \sigma_{ci} \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} \right)^\alpha$	A , parámetro adimensional , B es una contante de la roca y el valor de $\alpha \approx 0,65$	Yudhbir et al (1973)
$\sigma_1 = \sigma_{cm} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_{tm}} \right)^{b_m}$	Emplea RMR_{76}	Sheorey et al (1989)
$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma'_3 \cdot a_m \left(\frac{\sigma_{ci}}{\sigma'_3} \right)^{b_m}$	Versión 2001	Ramamurthy(1995)

De acuerdo a la Tabla (C.1):

$A, a, a_m, b, b_m, B, F, f, M, m, s, \alpha, m_b, \sigma_{cm}, \sigma_{tm}$, y $\sigma_c = \sigma_{ci}$ son constantes a determinar.

σ_1 es el esfuerzo principal mayor en la rotura y σ_3 el esfuerzo principal menor. Al considerar las tensiones principales efectivas, éstas se denotan como σ'_1 y σ'_3 .

$\sigma_c = \sigma_{ci}$ es la resistencia a compresión simple de la roca "intacta" (matriz rocosa).

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \quad \text{y} \quad \tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$$

σ_{tm} representa la resistencia a tracción simple de la masa rocosa, y es una fracción de σ_t (matriz rocosa).

σ_{cm} = resistencia a compresión sin confinar de la masa rocosa.

$\sigma'_{1n} = \sigma'_1 / \sigma_c$ y $\sigma'_{3n} = \sigma'_3 / \sigma_c$ (tensiones normales efectivas normalizadas).

Por otra parte, Úcar [5] ha obtenido la envolvente de rotura del criterio propuesto por Murrell [6] indicado en la referida Tabla (C.1).

Además, debe señalarse que la ecuación de la curva envolvente se determinó teniendo en cuenta en forma adimensional la ecuación de Murrell [6], a través de las investigaciones llevadas a cabo por Bieniawski [7]. Para mayor detalle véase el apéndice (D).

De acuerdo a Bieniawski [7] los esfuerzos principales en el instante de la falla están vinculados a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1 \quad (C.1)$$

Siendo σ_c la resistencia a compresión simple de la roca intacta y los parámetros A y K, constantes que dependen de las propiedades geomecánicas de la roca, tal como se indican en la tabla anexa

Tabla C.2. Según Bieniawski [7].

$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 + A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K \quad \therefore \quad K = 0,75$	
Tipo de roca intacta	A
Norita	5,0
Cuarcita	4,5
Limolita	4,0
Lodolita	3,0
Mayoría de las rocas	3,5

Por otro lado, Wang Chuan-Zhi et al [8], mencionan los trabajos de Richart realizados en ensayos triaxiales en hormigón, quien obtuvo inicialmente la relación:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 + 4,10 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \quad (C.2)$$

Es decir, $A=4,10$ y $K=1$. Esta ecuación lineal corresponde al criterio de rotura de Mohr – Coulomb como se apreciará más adelante a través del desarrollo matemático en el apéndice (D) de esta obra.

Por lo tanto, al tener en cuenta (C.2)

$$A = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = 4,10 \Rightarrow \varphi = 37,43^\circ$$

Siendo, φ el ángulo de fricción interna del hormigón.

Adicionalmente, Wang Chuan-Zhi et al [8] citan que Richart modificó la ecuación lineal obteniendo $A=3,7$ y $K=0,86$, como puede apreciarse en la Fig. (20), correspondiente al epígrafe 1.13 del capítulo 1 del libro.

También a través de la referida figura se comparan ambos criterios de rotura, observándose que aproximadamente hasta valores con relaciones de $\sigma_3/\sigma_c=0,60$ ambas ecuaciones presentan resultados muy cercanos de la tensión principal normalizada σ_1/σ_c . Igualmente puede observarse que el valor obtenido por Richart en las pruebas de compresión triaxial en el hormigón es de $K=0,86$; mientras que para rocas Bieniawski recomienda utilizar $K=0,75$.

Por otra parte, cabe destacar que a partir de 1980 el criterio de rotura de Hoek y Brown [9] es uno de los más utilizados, en particular se ha popularizado luego que la ecuación original ha sido expandida y mejorada; con la ventaja adicional que los parámetros m y s se obtienen bien sea en función del índice de calidad RMR de Bieniawski [1], o a través del índice de resistencia geológica GSI [3].

Para mayor detalle, véase el artículo de *Hoek –Brown Failure Criterion-2002 Edition*, por Hoek, Carranza –Torres y Corkum [10], el cual está disponible

en la página Web www.rocscience.com, incluyendo además el programa asistido por el ordenador: *Analysis of Rock Strength using Roc Lab*.

En función de lo previamente mencionado, y teniendo en cuenta la importancia del tema, en la sección 1.13 del capítulo 1, se ha comparado la ecuación propuesta en esta investigación con el criterio de Hoek Y Brown [10], el de Murrell [6] y la ecuación lineal de Mohr-Coulomb.

En dicha comparación, se han utilizado los datos experimentales obtenidos por Torres [11] en cilindros de hormigón ensayados a tracción, compresión simple y triaxial.

A la vez, debe indicarse que esta curva plana de rotura se ajusta mucho mejor a los datos experimentales al equipararse con resultados obtenidos entre los referidos criterios y la nueva relación que vincula los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la falla.

2. CRITERIO ORIGINAL DE ROTURA DE HOEK Y BROWN

Teniendo en cuenta la importancia de este criterio y su utilización cada día mayor en la ingeniería de rocas, a continuación se describe la nueva hipótesis de rotura desarrollada por Hoek y Brown [9] tanto en roca intacta como en macizos que exhiben características predominantes de diaclasamiento y meteorización.

A través de innumerables ensayos de laboratorio, conjuntamente con los fundamentos teóricos que existen sobre fractura y propagación de grietas en roca, Hoek y Brown [9], hallaron una nueva hipótesis empírica de rotura estableciendo la siguiente relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 , es decir:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 + \sigma_c \left[m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right]^{1/2} \\ \text{En forma adimensional,} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_c} &= \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \left[m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(Ver Fig. C.1)} \\ \text{(C.3)} \end{array}$$

Donde:

σ_1 = esfuerzo principal mayor en la rotura.

σ_3 = esfuerzo principal menor en la rotura.

σ_c = resistencia a compresión simple de la roca "intacta".

m, s = constantes que dependen de las propiedades de la roca.

El parámetro (m) controla la curvatura entre los esfuerzos principales, mientras que (s) regula la localización de la curva entre σ_1 y σ_3 .

En la Tabla C.3, se pueden apreciar los diferentes valores de m y s , dependiendo del índice RMR de Bieniawski. Por otra parte, de acuerdo a González de Vallejo et al [12] la Tabla C.4 incluye la clasificación Q de Barton.

La resistencia a compresión simple de la roca intacta σ_c se obtiene al considerar que no existe confinamiento lateral ($\sigma_3=0$), y que además el parámetro $s = 1$, resultando a través de (C.3) que $\sigma_1=\sigma_c$.

Cuando el macizo presenta planos de fracturas ($s < 1$), la resistencia a compresión sin confinar de la masa rocosa se denomina σ_{cm} y se determina como una fracción de σ_c , como podrá apreciarse más adelante.

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (C.3) y despejando σ_3 resulta:

$$\sigma_3 = \left[\sigma_1 + \frac{m}{2} \cdot \sigma_c \right] \pm \frac{1}{2} \left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2 \right)^{1/2} \quad \text{(C.4)}$$

Tomando la raíz no positiva de $\left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2\right)$ ya que σ_3 corresponde al esfuerzo principal menor, se tiene por tanto:

$$\sigma_3 = \left[\sigma_1 + \frac{m}{2} \cdot \sigma_c \right] - \frac{1}{2} \left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2 \right)^{1/2} \quad (C.5)$$

La resistencia a la tracción de la masa rocosa σ_{tm} se determina al considerar que $\sigma_1=0$, así la ecuación anterior toma la forma:

$$\sigma_3 = \sigma_{tm} = \frac{\sigma_c}{2} \cdot \left[m - \left(m^2 + 4 \cdot s \right)^{1/2} \right] \quad (C.6)$$

Las tablas siguientes, muestran los valores de los parámetros m y s en función de los índices de calidad RMR y Q.

La tabla C.4, corresponde a la versión en castellano realizada por Vallejo et. al [12], considerando el artículo: The Hoek-Brown failure criteria. A 1998 update. Trabajo presentado en el Quinceavo Simposio de Mecánica de Rocas, Universidad de Toronto, editado por J. Curran

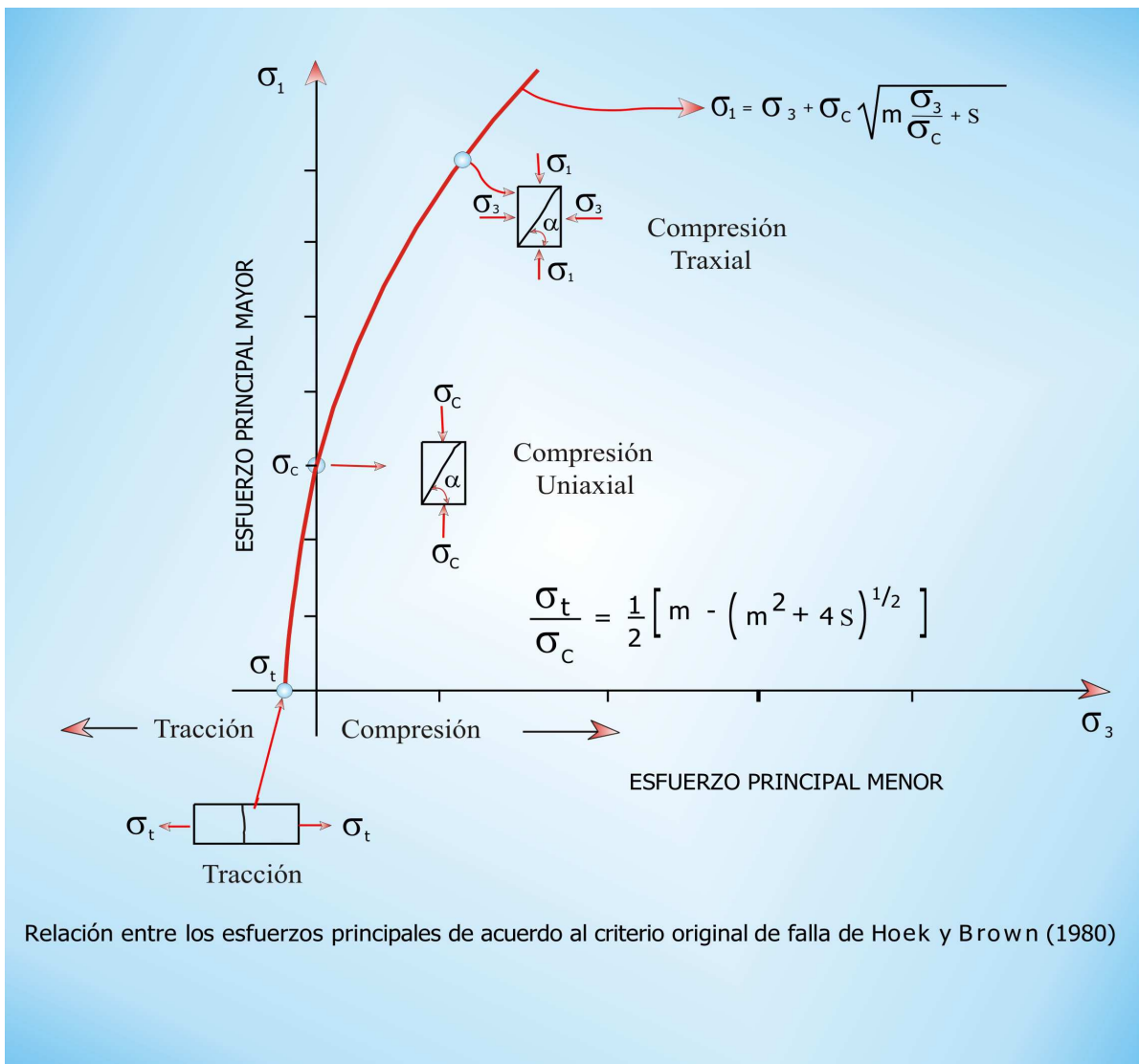


Figura C.1. Criterio de rotura original de Hoek y Brown [9].

Tabla C.3. Valores típicos de los parámetros del criterio de rotura de Hoek y Brown [9] en función del índice RMR.

TIPO DE ROCA CALIDAD DEL MACIZO ROCOSO	ROCAS CARBONATADAS BIEN CRISTALIZADAS (Dolomía, Caliza y Mármol)		ROCAS ARCILLOSAS LITIFICADAS Argilitas, Limolitas Pizarras no arenosas		ROCAS ARENOSAS Bien cementadas (Areniscas y Cuarcitas)		ROCAS ÍGNEAS DE GRANO FINO (Andesita, Basalto Diabasa y Riolita)		ROCAS METAMÓRFICAS E ÍGNEAS DE GRANO GRUESO (Gneis, granito, Gabro, Diorita)	
	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s
ROCA INTACTA (RMR = 100)	7,00	1,00	10,00	1,00	15,00	1,00	17,00	1,00	25,00	1,00
ROCA MUY BUENA (RMR = 85)	3,50	0,10	5,00	0,10	7,50	0,10	8,50	0,10	12,50	0,10
ROCA BUENA (RMR = 65)	0,70	0,004	1,00	0,004	1,50	0,004	1,70	0,004	2,50	0,004
ROCA NORMAL (RMR = 44)	0,14	0,0001	0,20	0,0001	0,30	0,0001	0,34	0,0001	0,50	0,0001
ROCA MALA (RMR = 23)	0,04	0,00001	0,05	0,00001	0,08	0,00001	0,09	0,00001	0,13	0,00001
ROCA MUY MALA (RMR = 3)	0,007	0	0,01	0	0,015	0	0,017	0	0,025	0

Tabla C4. Versión al castellano por González y Vallejo et al [12].

Relaciones aproximadas entre la calidad de los macizos rocosos y los valores de las constantes m y s , según el criterio de rotura de Hoek y Brown (1988) Versión en castellano de González de Vallejo *et al.*, (2002) Ingeniería Geológica

Q : Índice de Barton, RMR: Rock Mass Rating de Bieniawski

Criterio de rotura empírico $\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \sqrt{m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s}$ σ_1 y σ_3 : esfuerzos principales mayor y menor m y s : constantes empíricas del macizo rocoso	Constantes del material: m y s	Rocas carbonatadas: dolomías, calizas y mármol	Rocas arcillosas: argilitas, limolitas, lutitas y pizarras	Rocas areniscosas: areniscas y cuarcitas	Rocas ígneas cristalinas andesitas, doleritas, diabasas y riolitas.	Rocas cristalinas ígneas de grano grueso y metamórficas: granitos, gneises, etc.
Valores para el macizo rocoso alterado o perturbado por voladuras (<i>disturbed</i>)						
Valores para el macizo rocoso sin alterar (<i>undisturbed</i>)						
Muestras de roca intacta Muestras de tamaño de probeta de laboratorio sin discontinuidades. RMR = 100 $Q=500$	m	7,0	10,0	15,0	17,0	25,0
	s	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	m	7,0	10,0	15,0	17,0	25,0
	s	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Macizo rocoso de muy buena calidad Bloque de roca sana. Juntas sin meteorizar y con espaciado de 1 a 3 m. RMR = 85 $Q=100$	m	2,40	3,43	5,14	5,82	8,56
	s	0,082	0,082	0,082	0,082	0,082
	m	4,10	5,85	8,78	9,95	14,63
	s	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189
Macizo rocoso de calidad buena Bloques de roca sana o ligeramente meteorizada, con juntas espaciadas de 1 a 3 m. RMR = 65 $Q=10$	m	0,575	0,821	1,231	1,395	2,052
	s	0,00293	0,00293	0,00293	0,00293	0,00293
	m	2,006	2,865	4,298	4,871	7,163
	s	0,0205	0,0205	0,0205	0,0205	0,0205
Macizo rocoso de calidad media Varias familias de discontinuidades moderadamente meteorizadas con espaciados de 0,3 a 1 m RMR ≤ 44 $Q \geq 1$	m	0,128	0,183	0,275	0,311	0,458
	s	0,00009	0,00009	0,00009	0,00009	0,00009
	m	0,947	1,353	2,030	2,301	3,383
	s	0,00198	0,00198	0,00198	0,00198	0,00198
Macizo rocoso de calidad mala Numerosas juntas meteorizadas con algo de relleno. Brechas compactas sin rellenos. Espaciado de 0,03 a 0,5 m. RMR=33 $Q=0,1$	m	0,029	0,041	0,061	0,069	0,102
	s	0,000003	0,000003	0,000003	0,000003	0,000003
	m	0,447	0,639	0,959	1,087	1,597
	s	0,00019	0,00019	0,00019	0,00019	0,00019
Macizo rocoso de calidad muy mala Numerosas juntas intensamente meteorizadas con rellenos. Espaciado $<0,05$ m. Brechas con rellenos arcillosos. RMR=3 $Q=0,01$	m	0,007	0,010	0,015	0,017	0,025
	s	0,0000001	0,0000001	0,0000001	0,0000001	0,0000001
	m	0,219	0,313	0,469	0,532	0,782
	s	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
$\left. \begin{aligned} \text{Resistencia al corte} &= \tau_\alpha = \frac{m}{8} \sigma_c \left[\frac{1 - \sin \phi_i}{\tan \phi_i} \right] \\ \text{Tensión normal} &= \sigma_n = \frac{m}{8} \sigma_c \left[\frac{1}{2 \sin^2 \phi_i} + \sin \phi_i \right] - \sigma_c \left[\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right] \\ \phi_i &= \text{ángulo de fricción interna instantáneo} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Según} \\ \text{Úcar (1986)} \end{array}$						

A través de (C.3) y (C.6) se aprecian los límites de s , es decir:

$$s = 1, \sigma_1 = \sigma_c \quad \therefore \quad \text{roca intacta}$$

$$s = 0, \sigma_3 = \sigma_t = 0 \quad \therefore \quad \text{roca muy fracturada}$$

De lo anterior resulta, que, para otros estados intermedios del macizo rocoso, (s) se encontrara dentro del intervalo $0 < s < 1$.

Al considerar $s=1$ y $m=m_i$, se obtiene la resistencia a tracción en la condición intacta. Por tanto (C.6) se transforma:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_c}{2} \cdot \left[m_i - (m_i^2 + 4)^{1/2} \right] \quad (C.7)$$

El valor de $m=m_i$, en roca intacta (matriz rocosa) puede hallarse midiendo el ángulo α que forma la superficie de falla con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3 .

Por otra parte, al observar el triángulo ABC de la figura C.1 y empleando la ecuación (C.3), la magnitud de (α) se determina mediante la siguiente expresión:

$$\tan \alpha = \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right]^{1/2} = \left\{ 1 + \frac{m}{2 \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \right\}^{1/2} \quad (C.8)$$

Al considerar que:

$$s = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{roca intacta} \quad m = m_i$$

$$\sigma_3 = 0 \quad \therefore \quad \text{Ensayo de compresión sin confinar.}$$

Resulta por lo tanto: $\tan 2\alpha = (1 + m_i / 2)$ y $m_i = 2 (\tan^2 \alpha - 1)$

Adicionalmente, a continuación, se demuestra que para la condición de la roca intacta el valor del parámetro m es:

$$m \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right|, m = m_i \text{ (condición intacta)} \quad (C.9)$$

Por otra parte, la ecuación (C.3) puede expresarse como sigue:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^2 = m_i \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + 1 \quad (C.10)$$

Como previamente se ha mencionado la resistencia a tracción σ_t en la condición intacta ($s=1$) se determina considerando $\sigma_1=0$. En estas condiciones $\sigma_3=\sigma_t$, por lo tanto, la ecuación anterior toma la forma:

$$\left(-\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^2 = m_i \cdot \frac{\sigma_t}{\sigma_c} + 1 \quad (C.11)$$

Al despejar m_i , se obtiene:

$$m_i = \frac{\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^2 - 1}{\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)} \quad \therefore \sigma_t \text{ (valor negativo)} \quad (C.12)$$

Como una simple aproximación, si se considera que la relación:

$$\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \leq \frac{1}{10} \text{ el cuadrado es } \ll 1, \text{ obteniéndose finalmente la expresión}$$

$$m = m_i \approx -1 \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right). \text{ Al ser } \sigma_t \text{ negativo equivale a escribir } m_i \approx \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right|$$

También, cabe destacar que Úcar [13] aplicando dicho criterio original de Hoek y Brown¹, determinó analíticamente la solución exacta de la envolvente de rotura (véase apéndice E). Es decir la ecuación que gobierna la resistencia al corte τ_α conjuntamente la tensión normal σ_n . Ambas ecuaciones han sido expresadas paramétricamente en función del ángulo ϕ_i como se indica a continuación:

$$\tau_\alpha = \frac{m}{8} \cdot \sigma_c \left[\frac{1 - \text{sen}\phi_i}{\tan\phi_i} \right] \quad (\text{C.13})$$

$\phi_i = \beta$ es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la envolvente de la curva plana de rotura. Se conoce también como ángulo de fricción interna **instantáneo** y depende del nivel de la tensión normal (véase Fig. 1 del capítulo 1).

$$\alpha = \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_i}{2} \right] = \text{ángulo entre la superficie de falla y la dirección del esfuerzo principal menos } \sigma_3.$$

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{m}{8} \sigma_c \left[\frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \phi_i} + \text{sen}\phi_i \right] - \sigma_c \left[\frac{3 \cdot m}{16} + \frac{s}{m} \right] \quad (\text{C.14})$$

A través del apéndice (E), Úcar [13,14] explica y desarrolla el procedimiento matemático para determinar la envolvente de rotura considerando el criterio original de rotura de Hoek y Brown [9].

Los valores de m y s en función de RMR, pueden obtenerse de acuerdo a Hoek y Brown [15] cuando la roca ha sido bien excavada mediante voladura controlada (sin ser perturbada), y cuando ha sido perturbada. Las expresiones matemáticas son las siguientes:

¹La ecuación empírica de la envolvente utilizada por Hoek y Brown en sus investigaciones iniciales

es: $\tau_\alpha = A \cdot \sigma_c \left(\frac{\sigma_n - \sigma_t}{\sigma_c} \right)^B$ A y B constantes a determinar mediante ensayos.

$$m = m_i \exp \left[\frac{RMR - 100}{14I_m} \right] \quad (C.15)$$

$I_m = 1,00$ (roca perturbada) y $2,00$ (roca no perturbada).

m_i = valor de m al considerar la condición "intacta", ver Tablas C.3 y C.4.

$$s = \exp \left[\frac{RMR - 100}{6I_s} \right] \quad (C.16)$$

$I_s = 1,00$ (roca perturbada).

$I_s = 1,50$ (roca no perturbada).

Por otra parte, Hoek, Kaiser y Bawden [16], han determinado los parámetros m y s en función de un nuevo índice de calidad de la roca, conocido como índice de resistencia geológica GSI (*Geological Strength Index*), el cual evalúa la calidad del macizo rocoso en función del grado de fractura, tamaño de los bloques, rugosidad y alteración de las discontinuidades. Al tener en cuenta este nuevo índice resulta:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_i \cdot \exp \left[\frac{GSI - 100}{28} \right] \quad (\text{Ver Tabla C.5}) \\ s &= \exp \left[\frac{GSI - 100}{9} \right] \end{aligned} \right\} \quad (C.17)$$

m_i corresponde al valor de m para la roca intacta, es decir cuando $GSI=100$, por lo tanto, $s=1$.

Adicionalmente dichos investigadores, indican que el índice de resistencia geológica (*Geological Strength Index*) $GSI = RMR_{76}$, para el caso en el cual $RMR_{76} > 18$, y por otra parte $GSI = (RMR_{89} - 5)$, cuando la índice calidad del macizo rocoso $RMR_{89} > 23$.

En resumen, el GSI a través de observaciones visuales en el campo permite determinar la reducción de la resistencia de la masa rocosa en función de la

frecuencia de las diaclasas, su rugosidad, relleno y alteración de las paredes de las discontinuidades.

En este punto debe señalarse que Stille y Palmström¹, indican que este procedimiento visual representa un retorno a la descripción cualitativa en lugar de lograr avances desde el punto de vista cuantitativo con datos de entrada como el RMR o el sistema Q.

Adicionalmente, mencionan que el GSI se ha encontrado principalmente útil en rocas débiles con valores de $RMR < 20$, concluyendo, por otra parte, que este índice de resistencia geológica no corresponde a una clasificación ingenieril de la roca.

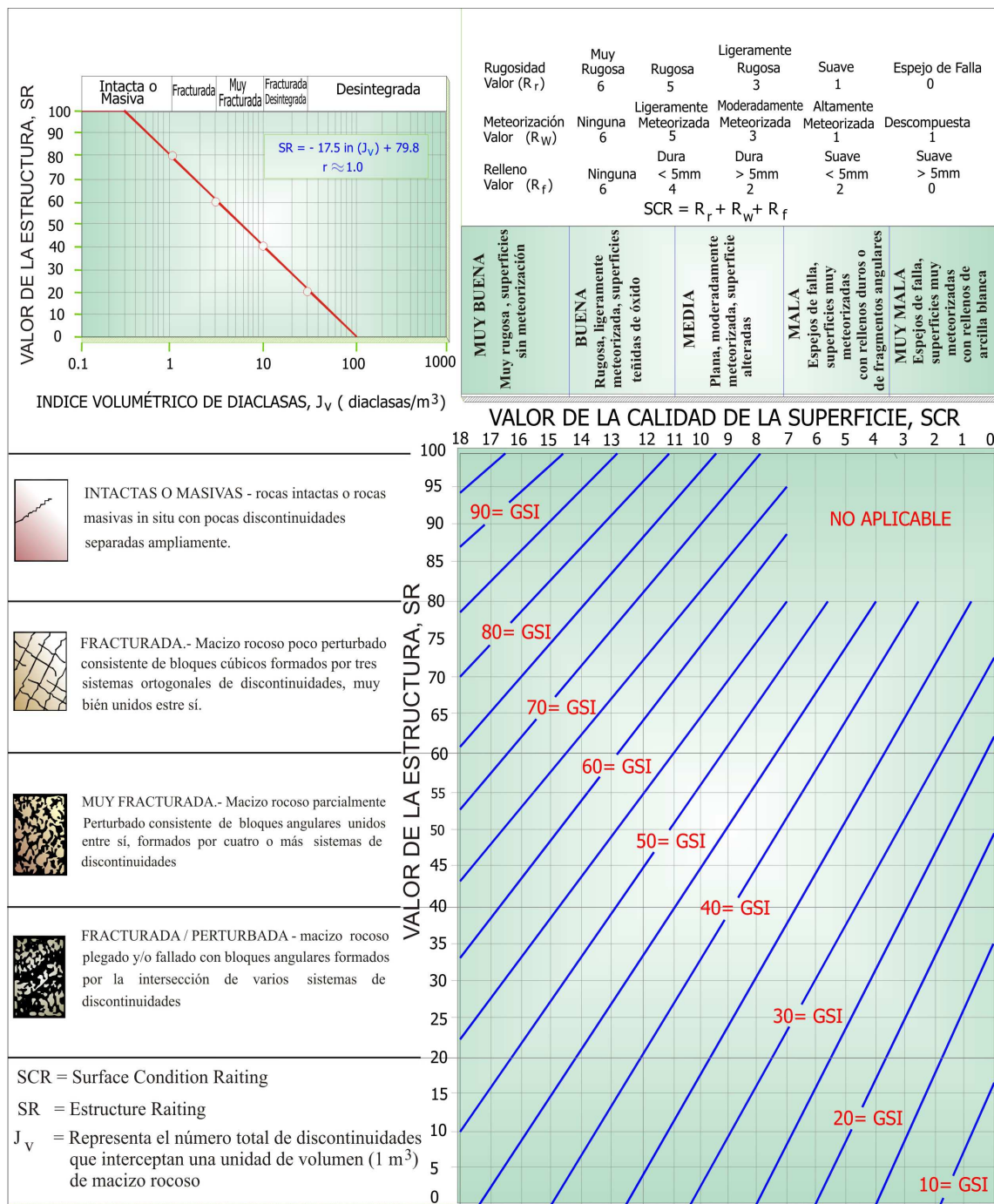
Posiblemente debido a lo previamente indicado, Sömez y Ulusay [17] recientemente han modificado la tabla anterior determinando el GSI en función del índice volumétrico de las diaclasas J_v , el cual representa el número total de discontinuidades que interceptan un volumen unitario (1 m^3), cuantificando además la rugosidad, alteración y relleno de las fracturas. De esta manera logran un valor del GSI más representativo a través del procedimiento de valoración que se indica en la Tabla C.6.

¹ Stille, H y Palmström, A (2003), "Classification as a tool in rock engineering", Tunnelling and Underground Space Technology. Volume 18. pp 331-345

Tabla C.5. Índice de calidad GSI.

GEOLOGICAL STRENGTH INDEX (GSI) ÍNDICE DE RESISTENCIA GEOLÓGICA A partir de la descripción de la estructura y las condiciones de la superficie de la masa rocosa, seleccionar el intervalo apropiado de esta gráfica. Estimar el valor promedio del Geological Strength Index (GSI) de dicho intervalo. No intentar ser tan preciso. Escoger un rango de GSI de 36 a 42 es más aceptable que fijar un GSI = 38. También es importante reconocer que el criterio de Hoek-Brown debería ser aplicada solamente en macizos rocosos donde el tamaño de los bloques o fragmentos es pequeño comparado con el tamaño de la excavación a ser evaluada. Cuando el tamaño de los bloques individuales es aproximadamente mayor a un cuarto de la dimensión de la excavación, generalmente la falla estaría controlada por la estructura y el criterio de Hoek-Brown no debería ser utilizado		CONDICIÓN DE LA SUPERFICIE				
ESTRUCTURA		MUY BUENA Muy rugosa, superficies sin meteorización	BUENA Rugosa, ligeramente meteorizada, superficies teñidas de óxido	MEDIA Plana, moderadamente meteorizada, superficie alteradas	MALA Espejos de falla, superficies muy meteorizadas con rellenos duros o de fragmentos angulares	MUY MALA Espejos de falla, superficies muy meteorizadas con rellenos de arcilla blanca
		DISMINUCIÓN EN CALIDAD DE SUPERFICIE →				
	INTACTAS O MASIVAS - rocas intactas o rocas masivas in situ con pocas discontinuidades separadas ampliamente.	90	80	N/A	N/A	N/A
	FRACTURADA.- Macizo rocoso poco perturbado consistente de bloques cúbicos formados por tres sistemas ortogonales de discontinuidades, muy bien unidos entre sí.		70			
	MUY FRACTURADA.- Macizo rocoso parcialmente perturbado consistente de bloques angulares unidos entre sí, formados por cuatro o más sistemas de discontinuidades		60			
	FRACTURADA / PERTURBADA - macizo rocoso plegado y/o fallado con bloques angulares formados por la intersección de varios sistemas de discontinuidades		50	40		
	DESINTEGRADA - macizo rocoso alternante Fracturado con mezcla de fragmentos angulares y redondeados, pobremente unidos entre sí			30	20	
	FOLIADA/LAMINADA - macizo rocoso foliado, plegado y cizallado tectónicamente. La esquistosidad prevalece Discontinuidades, completamente carente de bloques.	N/A	N/A		10	5

Tabla C.6.



ESTIMACIÓN DEL GSI SEGÚN SÓNMEZ Y ULUSAY (2002), PARA EVALUAR LA CALIDAD DEL MACIZO ROCOSO EN FUNCIÓN DEL GRADO Y LAS CARACTERÍSTICAS DE FRACTURACIÓN, ESTRUCTURA GEOLÓGICA, TAMAÑO DE LOS BLOQUES Y ALTERACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

2.1. Criterio generalizado de rotura de Hoek y Brown

Como se sabe, el criterio original de rotura en rocas publicado por Hoek y Brown [9] en 1980, ha generado buenos resultados para las mayorías de las rocas de calidad buena y media, en la cual la resistencia está controlada por un fuerte trabado de los trozos angulares de los granos minerales.

Posteriormente, Hoek y Brown en 1992 [18] mejoraron y extendieron la ecuación (C.3), la cual permite estimar con mayor precisión la resistencia en macizos rocosos de calidad pobre en donde la unión o trabazón de las partículas de roca ha sido destruida bien sea por efectos de la meteorización o el cizallamiento, dando como resultado, una roca sin resistencia a la tracción o cohesión.

Teniendo en cuenta lo previamente indicado, los mencionados autores han expresado en una forma más general la ecuación (C.3) en función del exponente (a), resultando, por lo tanto:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \quad (C.18)$$

Siendo:

$$a = \left[0,65 - \left(\frac{GSI}{200} \right) \right], \text{ si } GSI \leq 30 \quad (C.19)$$

Cuando $GSI \geq 30$, $a = 1/2$.

Posteriormente, Hoek, Carranza-Torres y Corkum [10]; junto con en el programa RocLab [19], incorporan en la ecuación (C.17) el factor D que depende del grado de perturbación de la roca durante el proceso de excavación, bien sea mediante explosivo o mecánicamente. Siendo, $D=0$ cuando el macizo rocoso no ha sido perturbado y el valor $D= 1$, para la condición en la cual la roca ha sido altamente perturbada durante el proceso de excavación.

A la vez, el exponente (a) involucrado en la fórmula (C.18) que vincula a los esfuerzos principales en la falla σ_1 y σ_3 ha sido modificado y se expresa como sigue:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \right) \quad (C.20)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= m_i \exp \left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D} \right) \\ s &= \exp \left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D} \right) \end{aligned} \right\} \quad (C.21)$$

Al considerar nuevamente que $\sigma_3=0$ el valor de la resistencia a compresión sin confinar de la masa rocosa es σ_{cm} . Por tanto, la ecuación (C.18) toma la forma:

$$\sigma_{cm} = \sigma_c (s)^a \quad (C.22)$$

Cabe señalar que algunos autores, como por ejemplo Ramamurthy² denotan dicha resistencia como $(\sigma_c)_j$ para la condición en la cual la roca contiene planos de discontinuidades que condicionan el comportamiento tenso-deformacional, hidráulico y resistente de los macizos rocosos.

Se aprecia, a través de la ecuación anterior, que para el caso particular en el cual el parámetro $s=1$, $\sigma_{cm}=\sigma_c$, es decir, corresponde cuando el medio rocoso es completamente sano (roca intacta).

Para el caso en el cual $\sigma_3=\sigma_{tm}$ y $\sigma_1=0$, la resistencia a tracción de la masa rocosa empleando (C.18), se transforma en la siguiente expresión:

$$\sigma_{tm} \approx -\frac{s \cdot \sigma_c}{m} \quad (C.23)$$

²Ramamurthy, T (2004), "A geo-engineering classification for rocks and rocks masses". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 41, pp89-101

Dicho valor aproximado se obtiene considerando que $(\sigma_{tm}/\sigma_c)^{1/a} \rightarrow 0$.

Para la condición de roca intacta, $s=1$, $m = m_i$ resulta: $\sigma_t \approx -\sigma_c/m_i$.

Por otra parte, en relación a la resistencia a compresión sin confinar σ_{cm} , Marinos y Hoek [20], han determinado dicho valor en función del índice GSI, m_i y de la resistencia a compresión sin confinar de la roca intacta $\sigma_c = \sigma_{ci}$, como a continuación se indica:

$$\sigma_{cm} = \left(0,0034 m_i^{0,80} \sigma_{ci} \right) \left\{ 1,029 + 0,025 \cdot e^{(-0,10 m_i)} \right\}^{GSI} \quad (C.24)$$

También, el valor de σ_{cm} puede obtenerse según Kalamaras y Bieniawski [21] en función del índice RMR de Bieniawski, a través de la expresión:

$$\sigma_{cm} = \sigma_c \exp \left\{ \frac{RMR - 100}{24} \right\} \quad (C.25)$$

Debe indicarse que las ecuaciones (C.24) y (C.25) dan resultados muy parecidos. Sin embargo, si hay diferencias con la ecuación propuesta por Barton [2]:

$$\sigma_{cm} = 5 \left(\frac{\gamma}{10} \right) Q_c^{1/3} \quad (C.26)$$

Siendo, $Q_c = Q (/100)$, con σ_c en MPa y γ el peso unitario en kN/m^3 .

Para completar este importante tópico, es oportuno aclarar lo siguiente:

Hoek en su artículo *Uniaxial compressive Strength versus Global strength in the Hoek Brown criterion*, disponible en www.rocscience.com, indica que la ecuación (C.22), tiene aplicación limitada por cuanto calcula la resistencia específicamente en la periferia de un túnel, o en el lindero de la cara del talud o de un pilar, pero no en el interior de la masa rocosa.

A la vez, menciona que es de interés determinar la resistencia a la compresión de la roca en función del grado de confinamiento conocida como

resistencia *global o media*. En estas condiciones previamente descritas Hoek, Carranza-Torres y Corkum [10], recomiendan la siguiente ecuación³:

$$(\sigma_{cm})_{confinada} = \sigma_c \left[\frac{[m+4s-a(m-8s)] \left(\left(\frac{m}{4} \right) + s \right)^{(a-1)}}{2(1+a)(2+a)} \right] \quad (C.27)$$

Definida en el intervalo de confinamiento: $0 < \sigma_3 < \frac{\sigma_c}{4}$.

Sin lugar a dudas, este intervalo es muy amplio y por lo tanto, la ecuación indicada en (C.27) es una aproximación al problema y debe emplearse con precaución. Además, al aplicar referido criterio de Hoek y Brown, la resistencia de la roca varía en forma importante alrededor de $\sigma_n = 0$ debido a la elevada pendiente de la curva $\sigma_1 = f(\sigma_3)$.

Por otra parte, en el presente trabajo a la ecuación (C.27) se le ha colocado como subíndice la palabra "confinada", para no confundir dicha ecuación con las indicadas en (C.22), (C.24), (C.25) y (C.26) que se refieren específicamente a la resistencia a compresión sin confinar de la masa rocosa, la cual corresponde cuando $\sigma_3 = 0$.

Se ha considerado conveniente dilucidar este punto, ya que Marinis y Hoek [29] han definido con anterioridad a σ_{cm} como la resistencia a compresión sin confinar.

Igualmente, cabe mencionar que Hoek y Marinis en el año 2000 utilizan el mismo concepto de σ_{cm} descrito en el párrafo anterior a través del artículo *Predicting tunnel squeezing problems in weak heterogeneous rock masses* (Véase la página web Select Publications by E. Hoek: <http://www.rocksolid.com/hoek/references/Published-Papers.htm>).

Teniendo en cuenta el análisis precedente, es oportuno señalar que es necesario ser cuidadoso con la terminología empleada en los diferentes

³En esta obra la ecuación (C27) se ha expresado como $(\sigma_{cm})_{confinada}$ en lugar de σ_{cm} , tal como lo expresan los referidos autores en su artículo *Hoek-Brown Criterion – 2002 Edition* [20]. De esta manera se evitan confusiones, por cuanto en la mecánica de rocas σ_{cm} se ha definido como la resistencia *sin confinar* del macizo rocoso.

artículos sobre resistencia al corte en macizos rocosos. Un caso particular es el programa RocLab, en el cual valor de σ_{cm} ha sido definido como la resistencia global a la compresión y no como la resistencia sin confinar de la masa rocosa, por cuanto son dos conceptos totalmente diferentes.

El referido programa [19] asistido por ordenador se obtiene libremente a través de: <https://www.rocscience.com/rocscience/products>.

Finalmente, Kumar [22], teniendo en cuenta el criterio de rotura desarrollado por Hoek y Brown [9], ha determinado la envolvente de rotura y la tensión normal para el caso general de $a \geq 1/2$ mediante un sencillo procedimiento analítico, sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial; tal como fue hallada previamente por Úcar [13], utilizando la ecuación original que relaciona los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 del mencionado criterio, mediante la conocida ecuación cuadrática representada a través de la ecuación (C.3), es decir $a = 1/2$.

Lamentablemente, estas ecuaciones han sido poco difundidas, a pesar de que la contribución llevada a cabo por Kumar [22] es de gran relevancia al poder determinar la resistencia al corte en macizos rocosos, tanto en la condición intacta como considerando los planos de discontinuidad.

La resistencia al corte y la tensión normal, según dicho autor, son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} &= \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \sin \phi_i}{\sin \phi_i} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{\cos \phi_i}{2} \right) \\ \frac{\sigma_n}{\sigma_c} &= \frac{1}{m} \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \sin \phi_i}{\sin \phi_i} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(1 + \frac{\sin \phi_i}{a} \right) - \frac{s}{m} \end{aligned} \right\} \quad (C.28)$$

Como puede apreciarse, al considerar el valor de $a = 1/2$, se obtienen las ecuaciones indicadas a través (C.13) y (C.14), las cuales han sido derivadas por Úcar [13].

2.2. Resumen de las ecuaciones más importantes utilizando el criterio empírico de rotura de Úcar y de Hoek y Brown; y su aplicación a través de un ejemplo comparativo

Para mayor comprensión previamente se indican las ecuaciones a utilizar en ambos criterios de rotura y su posterior análisis mediante un ejemplo, en el cual se equiparan los parámetros resistentes.

a) Criterio de Úcar

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m\right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m\right)^{1/2} \Longrightarrow \text{Ecuación} \quad (144)$$

• Ecuaciones requeridas para determinar los parámetros k_1 y k_2

Resistencia a compresión simple del macizo rocoso,

$$\sigma_{cm} \approx \sigma_c \exp\left(\frac{RMR-100}{a_c}\right) \Longrightarrow \text{Ecuación} \quad (138)$$

$$\eta_m = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c}\right) \approx \exp\left(\frac{RMR-100}{a_c}\right) \Longrightarrow \text{Ecuación} \quad (148)$$

Resistencia a tracción del macizo rocoso,

$$\sigma_{tm} \approx \sigma_c \exp\left(\frac{RMR-100}{14}\right) \Longrightarrow \text{Ecuación} \quad (139)$$

$$\xi_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c}\right) \approx \xi \cdot \exp\left(\frac{RMR-100}{14}\right) \Longrightarrow \text{Ecuación} \quad (140)$$

$$k_1 = \frac{-(\eta_m + |\xi_m|) + \sqrt{\eta_m^2 + 6\eta_m \cdot |\xi_m| - 7\xi_m^2}}{2|\xi_m|} \longrightarrow \text{Ecuación (147)}$$

$$k_2 = \frac{[\eta_m - k_1(-\xi_m)]}{\sqrt{-\xi_m}} \longrightarrow \text{Ecuación (145)}$$

• Otras ecuaciones de interés

Pendiente de la curva $\bar{\sigma}_1 = f(\bar{\sigma}_3)$ al considerar la ecuación (110)

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = \tan^2 \alpha = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi_m}}$$

β , es el ángulo que forma la recta tangente a la envolvente de rotura con la horizontal en el punto de coordenadas $P(\sigma_n, \tau_\alpha)$.

$\alpha = \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$ es el ángulo que forma el plano de falla con el esfuerzo principal menor σ_3 .

Tensión normal para el caso particular que el esfuerzo principal menor $\sigma_3 = 0$.

$$\left[(\bar{\sigma}_n)_{\sigma_3=0} \right] = \eta_m \left(\frac{2\sqrt{-\xi_m}}{2\sqrt{\xi_m} \cdot (1+k_1) + k_2} \right) \longrightarrow \text{Ecuación (151)}$$

Por otra parte, el ángulo $\beta = \beta_1$ que forma la tangente a la envolvente de rotura en el punto $P(\sigma_n, \tau_\alpha)_{\sigma_3=0}$, se obtiene a través de la ecuación:

$$\left[(\tan \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] = \frac{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \longrightarrow \text{Ecuación (150)}$$

Siendo,

$$(\beta_1)_{\sigma_3=0} = \arcsen \left[\frac{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1-1) + k_2}{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1+1) + k_2} \right]$$

Cálculo de la constante de integración k_4 ,

$$\left[(\bar{\sigma}_n)_{\sigma_3=0} - \xi_m \right] = \left[1 - (\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] \times \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]^2} \right] \right\} \Rightarrow (97)$$

La tensión normal y la resistencia al corte se determinan a través de (69) y (55), pero considerando que $\xi = \xi_m$, resultando:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \xi_m + (1 - \sen \beta) \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1) \sen \beta \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1) \sen \beta \right]^2} \right] \right\} \Rightarrow (69)$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi_m \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2} \Rightarrow \text{Ecuación (55)}$$

También, utilizando las conocidas ecuaciones:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sen^2 \alpha = \bar{\sigma}_1 \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_3 \sen^2 \alpha$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3) \sin 2\alpha$$

Siendo:

$$\alpha = \arctan \left[k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\sigma_3 - \xi_m}} \right]^{1/2}$$

b) Criterio de Hoek y Brown [18]

$$\bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \Rightarrow \bar{\sigma}_1 = (\bar{\sigma}_3) + (m \bar{\sigma}_3 + s)^a \quad \text{Ecuación (C.18)}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \right) \Longrightarrow \quad \text{Ecuación (C.19)}$$

En este caso, se ha considerado que el grado de perturbación $D=0$.

$$\sigma_{tm} = -s \left(\frac{\sigma_c}{m} \right) \Longrightarrow \quad \text{Ecuación (C.23)}$$

$$\left. \begin{aligned} m &= m_i \cdot \exp \left[\frac{GSI - 100}{28 - 14D} \right] \\ s &= \exp \left[\frac{GSI - 100}{9 - 3D} \right] \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \quad \text{Ecuación (C.21)}$$

Donde, s y m son constantes que dependen de las propiedades de la roca.

Por otra parte, si el medio rocoso se encuentra completamente sano (roca intacta) $GSI = RMR = 100$, $m = m_i$ y $s=1$.

• **Otras ecuaciones de interés**

Pendiente de la curva $\bar{\sigma}_1 = f(\bar{\sigma}_3)$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} = \left[1 + a m \left(m \bar{\sigma}_3 + s \right)^{(a-1)} \right] = \tan^2 \alpha = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

La resistencia al corte y la tensión normal de acuerdo a Kumar [22] son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} &= \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \sin \beta}{\sin \beta} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{\cos \beta}{2} \right) \\ \frac{\sigma_n}{\sigma_c} &= \frac{1}{m} \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \sin \beta}{\sin \beta} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(1 + \frac{\sin \beta}{a} \right) - \frac{s}{m} \end{aligned} \right\} \quad (C.28)$$

Expresando estas dos últimas ecuaciones en términos de $\tan \beta$ resulta:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}} \right) - 1 \right]^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \right) \quad (C.29)$$

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \cdot \left[\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}} \right) - 1 \right]^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \cdot \left(1 + \frac{\tan \beta}{a \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \right) - \left(\frac{s}{m} \right)$$

La utilidad de expresar (C29) como $f(\tan \beta)$ se observará en las páginas siguientes.

Como previamente se ha indicado, el ángulo β se refiere también por ϕ_i (ángulo de fricción interna instantáneo que depende del nivel de tensiones).

2.2.1. Ejemplo comparativo. Determinación de σ_1 , α , β , σ_n y τ_α

En un afloramiento de roca caliza se han investigado las propiedades y características de la matriz rocosa, junto con las discontinuidades de la roca, para su evaluación geomecánica.

Al caracterizar el macizo rocoso, se ha considerado entre otros parámetros la abertura, relleno, número de familia de discontinuidades, grado de fracturación y meteorización. Los datos obtenidos se indican a continuación:

- Resistencia a compresión sin confinar de la roca intacta, $\sigma_c = 48$ MPa.
- Resistencia a tracción, $\sigma_t = 4$ MPa.
- $\xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) = -\frac{1}{12} \approx -0,083$.
- Índice de resistencia geológica $GSI \cong RMR = 55$.

Cabe destacar que el procedimiento analítico se lleva a cabo teniendo en cuenta como dato inicial el esfuerzo principal menor en la rotura σ_3 , el cual en forma normalizada respecto a σ_c , tiene un valor de $(\sigma_3 / \sigma_c) = 0,10$.

Determinación de los parámetros resistentes. Criterio de Úcar

Cuadro C.1. Ecuaciones y Cálculos.

Considerando que $RMR = 55$ y $a_c = 20$ (valor recomendado), resulta:

Ecuación (138)

$$\eta_m = \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} \right) \approx \exp \left(\frac{RMR - 100}{a_c} \right) \approx \exp \left(\frac{55 - 100}{20} \right) = 0,1053$$

$$\sigma_{cm} = 0,1053 \cdot 48 \text{ MPa} = 5,054 \text{ MPa}$$

Ecuación (140)

$$\xi_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) \approx \xi \cdot \exp \left(\frac{RMR - 100}{14} \right) = -0,0833 \cdot \exp \left(\frac{55 - 100}{14} \right) = -0,0033$$

Conociendo η_m y ξ_m los parámetros k_1 y k_2 se obtienen a través de las ecuaciones (147) y (145), resultando: $k_1 = 0,884$ y $k_2 = 1,77$

Utilizando la ecuación (144), la tensión principal mayor σ_1 es:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = 0,884(0,10 + 0,0033) + 1,77 \sqrt{(0,10 + 0,0033)} = 0,66$$

$$\sigma_1 = 0,66 \cdot 48 \text{ MPa} = 31,68 \text{ MPa}$$

Cuadro C.2. Ecuaciones y Cálculos.

Empleando la ecuación (110):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = \tan^2 \alpha = k_1 + \frac{k_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi_m}}$$

El ángulo que forma el plano de falla (α) con la dirección de la tensión principal menor σ_3 es por lo tanto:

$$\alpha = \arctan \sqrt{0,884 + \frac{1,77}{2(0,1 + 0,0033)^{1/2}}} = 62,33^\circ$$

Conociendo que: $\alpha = \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$

El ángulo de inclinación β que forma la recta tangente a la envolvente de rotura para el estado tensional (σ_3, σ_1) es:

$$\beta = 34,66^\circ \text{ (ángulo de fricción interna instantáneo)}$$

Siendo la tensión normal y la resistencia al corte:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin^2 \alpha = \bar{\sigma}_1 \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_3 \sin^2 \alpha$$

$$\bar{\sigma}_n = 0,66 \cdot \cos^2 62,33^\circ + 0,10 \cdot \sin^2 62,33^\circ = 0,22$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin 2\alpha$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3) = 0,28 \cdot \sin 124,66^\circ = 0,23$$

Cuadro C.3. Ecuaciones y Cálculos.

La constante de integración k_4 se obtiene a través de las ecuaciones (151), (150) y (152):

$$\left[(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right] = \eta_m \left(\frac{2\sqrt{-\xi_m}}{\left[2\sqrt{\xi_m} \cdot (1+k_1) \right] + k_2} \right)$$

$$\left[(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right] = \frac{0,1054 \cdot (2\sqrt{0,0033})}{\left[2\sqrt{0,0033} \cdot (1+0,884) \right] + 1,77} = 0,0061$$

$$(\beta_1)_{\sigma_3=0} = \arcsen \left[\frac{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1 - 1) + k_2}{2\sqrt{-\xi_m} \cdot (k_1 + 1) + k_2} \right]. \text{Sustituyendo se tiene :}$$

$$(\beta_1)_{\sigma_3=0} = \arcsen \left[\frac{(2\sqrt{0,0033})(-0,116) + 1,77}{2\sqrt{0,0033} \cdot (1,884) + 1,77} \right] = 62,08^\circ$$

$$\text{Conociendo} \left[(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right] = 0,0061 \text{ y } \left[(\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right] = 0,884$$

La constante k_4 se obtiene a través de la ecuación :

$$\left[(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} - \xi_m \right] = \left[1 - (\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]$$

$$\times \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1) \left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]}{\left[(1-k_1) + (1+k_1)(\sen \beta_1)_{\sigma_3=0} \right]^2} \right] \right\}$$

$$k_4 = -0,427$$

Cuadro C.4. Ecuaciones y Cálculos.

Conociendo que: $k_4 = -0,427$, $k_1 = 0,884$, $k_2 = 1,77$ y $\beta = 34,65^\circ$ y a través de la ecuación obtenida por Úcar, igualmente se obtiene:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = [\xi_m + (1 - \sin \beta)] \cdot \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1)[(1-k_1) + (1+k_1)\sin \beta]}{[(1-k_1) + (1+k_1)\sin \beta]^2} \right] \right\}$$

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = [-0,0033 + (1 - \sin 34,65^\circ)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ -0,428 + 0,221 \left[\frac{3,536 + 2,116 \cdot [0,116 + 1,884 \cdot \sin 34,65^\circ]}{[0,116 + 1,071]^2} \right] \right\} = 0,22$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_n} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_n} - \xi_m \right) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) - k_1 \right]^2}$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = 0,2233 \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{34,65^\circ}{2} \right) - \frac{\left(\frac{1,77}{2} \right)^2 \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{34,65^\circ}{2} \right)}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{34,65^\circ}{2} \right) - 0,884 \right]^2} = 0,23$$

La ecuación anterior equivale también a escribir:

$$\overline{\tau_\alpha} = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2} \right) = 0,12 \cdot \tan 62,32^\circ = 0,23$$

Determinación de los parámetros resistentes- Criterio de Hoek y Brown

Cuadro C5. Ecuaciones y Cálculos.

Considerando que el grado de perturbación $D = 0$, $m = 12$

y el índice $GSI = 55$, resulta :

$$m = m_i \cdot \exp \left[\frac{GSI - 100}{28 - 14D} \right] = 12 \cdot \exp \left[\frac{55 - 100}{28} \right] = 2,41$$

$$s = \exp \left[\frac{GSI - 100}{9 - 3D} \right] = \exp \left[\frac{55 - 100}{9} \right] = 0,0067$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-55/15} - e^{-20/3} \right) = 0,504$$

La tensión principal en la rotura normalizada es :

$$\bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \Rightarrow \bar{\sigma}_1 = \left(\bar{\sigma}_3 \right) + \left(m \bar{\sigma}_3 + s \right)^a$$

$$\bar{\sigma}_1 = 0,10 + \left(2,41 \cdot 0,10 + 0,0067 \right)^{0,504} = 0,595$$

Cuadro C.6. Ecuaciones y Cálculos.

El ángulo que forma el plano de falla (α) con la dirección de la tensión principal menor σ_3 es por lo tanto :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} = \left[1 + a m (m \bar{\sigma}_3 + s)^{(a-1)} \right] = \tan^2 \alpha = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\alpha = \arctan \sqrt{1 + a m (m \bar{\sigma}_3 + s)^{(a-1)}}$$

$$\alpha = \arctan \sqrt{1 + 0,504 \cdot 2,41 (2,41 \cdot 0,10 + 0,0067)^{-0,496}} = 61,62^\circ$$

El ángulo de inclinación β que forma la recta tangente a la envolvente de rotura para el estado tensional (σ_3, σ_1) es :

$$\beta = 33,24^\circ \text{ (ángulo de fricción interna instantáneo)}$$

Siendo la tensión normal y la resistencia al corte :

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin^2 \alpha = \bar{\sigma}_1 \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_3 \sin^2 \alpha$$

$$\bar{\sigma}_n = 0,595 \cdot \cos^2 61,62^\circ + 0,10 \cdot \sin^2 61,62^\circ = 0,212$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin 2\alpha$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3) = 0,248 \cdot \sin 123,24^\circ = 0,207$$

Debe señalarse que al comparar ambos criterios de rotura se consiguen valores muy cercanos de la tensión normal y de resistencia al corte.

Cuadro C.7. Ecuaciones y Cálculos.

La tensión normal y la resistencia al corte de acuerdo a Kumar [22] aplicando el criterio de rotura de Hoek y Brown son las siguientes :

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left(\frac{\cos \beta}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = \left(\frac{2,41 \cdot 0,504}{2} \right)^{1,016} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} 33,24^{\circ}}{\operatorname{sen} 33,24^{\circ}} \right)^{1,06} \left(\frac{\cos 33,24^{\circ}}{2} \right)$$

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = 0,207$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = \frac{1}{m} \left(\frac{m a}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} \right) - \frac{s}{m}$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = \frac{1}{2,41} (0,607)^{2,016} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} 33,24^{\circ}}{\operatorname{sen} 33,24^{\circ}} \right)^{2,016} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 33,24^{\circ}}{0,504} \right) - 0,0028$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = 0,212$$

Se observa que al aplicar las ecuaciones de Kumar, se obtienen los

mismos valores de $\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right)$ y $\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)$

2.2.2. Linealización a través del nuevo criterio propuesto para determinar los parámetros de corte equivalentes C y ϕ (valores instantáneos)

El método y ejemplo de cálculo de linealización que se describe a continuación permite calcular los parámetros de corte equivalentes C y ϕ de la masa rocosa; facilitando de esta manera el análisis de problemas geotécnicos con programas asistidos por el ordenador cuya curva de resistencia intrínseca es lineal.

El procedimiento se basa en conocer previamente el nivel de la tensión normal conjuntamente con el criterio de rotura bidimensional descrito en las secciones anteriores.

En estas condiciones, al aplicar la ecuación lineal de Mohr-Coulomb, se determina la cohesión (resistencia a cero esfuerzo normal) conociendo el punto de rotura de coordenadas $P(\sigma_n, \tau_\alpha)$ y el valor de $\beta = \phi = \phi_i$ (ángulo de fricción interna instantáneo), el cual se obtiene en función de la tensión normal σ_n .

Es importante señalar que existen otros métodos de linealización para determinar el ángulo de rozamiento y la cohesión equivalentes, tal como lo menciona Puell et al ⁴

Dichos autores aplicando el criterio de rotura empírico de Hoek y Brown mencionan otros métodos de linealización, como son el método de la secante, el de regresión lineal y el del área equivalente, indicando además, las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Por otro lado, cabe destacar que los referidos métodos pueden ser utilizados en la ecuación parabólica que vincula las tensiones principales en el instante de la rotura previamente indica a través de la ecuación (34), sección 1.3 del capítulo 1.

También es importante señalar que al utilizar los criterios de rotura de Hoek y Brown [18], Barton y Choubey [23] junto con el presentado por el autor de la presente obra entre otros investigadores; se obtienen ángulos de fricción

⁴ Puell, F., De La Fuente, P., y Arenillas, M. (2004), "La linealización del criterio de Hoek y Brown en el análisis de la estabilidad de taludes en roca". pp 37-44, Revista de Obras Públicas N° 3.446, Julio – Agosto.

interna altos para tensiones normales efectivas de compresión muy bajas. Por otra parte, para presiones de confinamiento elevadas cuya profundidad de transición produce deformaciones en la roca que traspasan el comportamiento de rotura frágil a dúctil; se observan ángulos de fricción interna variando poco más o menos entre los 8° a 20°.

También, Barton y Choubey [23] mencionan que es habitual encontrar en variedad de casos estudiados en la ingeniería geotécnica magnitudes de la tensión normal efectiva variando en un intervalo aproximado de 0,10 a 2 MPa.

Estos valores son, por lo general, alrededor de tres órdenes de magnitud menores que los obtenidos por los geólogos que investigan fallas tectónicas, es decir, cuando la tensión normal efectiva se encuentra entre 100 y 2.000 MPa.

Por tal motivo, los valores relacionados con la resistencia al corte pueden variar en forma substancial dependiendo del nivel de la tensión normal efectiva, siendo este el factor más importante que afecta la magnitud de la resistencia al cizallamiento de la masa rocosa.

A la vez, se observa como el ángulo de inclinación de la tangente a la envolvente de rotura o curva de resistencia intrínseca, cambia en forma importante alrededor del origen donde $\sigma_n=0$.

Esto indica la relevancia de conocer con la mayor precisión posible la magnitud de la tensión normal efectiva dentro de un conocido intervalo de presiones. Por ejemplo, por mencionar un caso es necesario considerar los niveles de confinamiento lateral al analizar la estabilidad de taludes en obras viales.

Adicionalmente, dicho intervalo puede expresarse también en función del esfuerzo principal menor σ_3 como se podrá apreciar en las páginas siguientes al determinar los parámetros equivalentes C y ϕ (valores en función de un determinado intervalo de tensiones) aplicando el criterio de rotura de Hoek y Brown.

Finalmente, la experiencia ha demostrado que al aplicar el método de linealización en ciertas ocasiones sobrestiman o minusvaloran la resistencia al corte de la roca.

Sin embargo, es una herramienta útil que debe ser utilizada con las precauciones y cautela que requiera el estudio.

• Ejemplo de aplicación práctica

Continuando con el ejemplo descrito en la sección 2.2.1, se desea determinar el valor de la cohesión y el ángulo de fricción interna equivalente (*valores instantáneos*) en un macizo rocoso donde afloran capas de caliza con un índice de calidad de Bieniawski $RMR \cong GSI = 55$.

Adicionalmente, se sabe que:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \sigma_c = 48 \text{ MPa} \\ \bullet \sigma_t = -4 \text{ MPa} \end{array} \right\} \xi = (\sigma_t / \sigma_c) = - (1/12)$$

Por otro lado, a través de los resultados obtenidos en el apartado 2.2.1 se ha considerado como dato inicial que el nivel de la tensión normal σ_n en forma normalizada respecto a σ_c es: $(\sigma_n/\sigma_c)=0,22$.

A continuación, se utilizan los criterios de rotura de Úcar y de Hoek y Brown.

• Determinación de los parámetros de corte equivalentes C y Ø (valores instantáneos) aplicando el criterio de Úcar

A través de la ecuación (69) ⁵ y los parámetros previamente calculados:

$k_1=0,884$, $k_2=1,77$ (ecuaciones 147 y 145), $k_4=-0,427$ y $\xi_m=-0,0033$, se determina el valor de $\beta=\emptyset=\emptyset_i$.

Teniendo en cuenta que $(\sigma_n/\sigma_c)=0,22$ y utilizando la herramienta de análisis Solver con la ayuda de la hoja de cálculo Excel, se obtiene el ángulo fricción interna instantáneo.

⁵ En dicha ecuación se ha reemplazado el parámetro ξ por ξ_m .

$$\xi_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_c} \right) \approx \xi \cdot \exp\left(\frac{RMR-100}{14} \right) \quad . \quad \text{En el caso que } RMR=100, \xi_m = \xi = (\sigma_t/\sigma_c)$$

Cuadro C.8. Ecuaciones y Cálculos.

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = [\xi_m + (1 - \operatorname{sen}\beta)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ k_4 + \left(\frac{k_2}{2(1+k_1)} \right)^2 \left[\frac{4k_1 + (3-k_1)[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen}\beta]}{[(1-k_1) + (1+k_1)\operatorname{sen}\beta]^2} \right] \right\}$$

$$(0,22) = [-0,0033 + (1 - \operatorname{sen}\beta)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ -0,427 + \left(\frac{1,77}{2(1+0,884)} \right)^2 \left[\frac{4 \cdot (0,887) + (3-0,884)[(1-0,884) + (1+0,884)\operatorname{sen}\beta]}{[(1-0,884) + (1+0,884)\operatorname{sen}\beta]^2} \right] \right\}$$

$$\beta = \varphi = 34,65^\circ$$

Del ejemplo anterior se conoce la resistencia al corte $\tau_\alpha = f(\sigma_n, \beta)$, por lo tanto al aplicar la envolvente lineal de Mohr–Coulomb resulta:

Cuadro C.9. Ecuaciones y Cálculos.

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = 0,23 \text{ (Véase ecuación 55, } \xi \text{ es reemplazado por } \xi_m \text{)}$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{C}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) \tan \phi_i$$

$$\left(\frac{C}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) - \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) \tan \phi_i = 0,23 - 0,22 \tan 34,65^\circ$$

$$\left(\frac{C}{\sigma_c} \right) = 0,078 \quad , \quad C = 0,078 \times \sigma_c = 3,12 \text{ MPa}$$

Siendo además $\beta = \phi_i = 34,65^\circ$

Por otra parte, como complemento seguidamente se determina la resistencia al corte correspondiente a la ordenada en el origen. Es decir, cuando tensión normal $\sigma_n = 0$.

Cuadro C.10. Ecuaciones y cálculos.

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0 = [-0,0033 + (1 - \text{sen } \beta)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ -0,427 + \left(\frac{1,77}{2(1+0,884)} \right)^2 \left[\frac{4(0,887) + (3-0,884)[(1-0,884) + (1+0,884) \text{sen } \beta]}{[(1-0,884) + (1+0,884) \text{sen } \beta]^2} \right] \right\}$$

$$\beta = \phi_l = 68,30^\circ$$

Obsérvese como se incrementó el ángulo de fricción interna al considerar que $(\sigma_n / \sigma_c) = 0$.

Cuadro C.11. Ecuaciones y cálculos.

Aplicando la ecuación obtenida por Úcar, y considerando que $\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = 0$, $k_1 = 0,884$

$k_2 = 1,77$, $\beta = 68,30^\circ$ y $\xi_m = -0,0033$, la resistencia al corte a cero tensión normal

(valor de la ordenada en el origen) se obtiene a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \xi_m\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - k_1\right]^2}$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = 0,0033 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{68,30^\circ}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1,77}{2}\right)^2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{68,30^\circ}{2}\right)}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{68,30^\circ}{2}\right) - 0,884\right]^2} = 0,0114$$

Valor que también equivale a escribir: $\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \cdot \tan\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)$

Empleando la ecuación anterior, la tensión principal menor normalizada es: $\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) = -0,0022$

Sabiendo que $\sigma_c = 48,00 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_3 = 48,00 \cdot (-0,0022) \text{ MPa} = -0,106 \text{ MPa}$

Siendo además, la tensión principal mayor normalizada:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = k_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m\right) + k_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi_m\right)^{1/2} = 0,060 \quad (\sigma_1 = 2,88 \text{ MPa})$$

• **Determinación de los parámetros de corte equivalentes C y ϕ (valores instantáneos) aplicando el criterio de Hoek y Brown**

A través de la Fig. C.2, se muestran los valores resistentes de C y ϕ instantáneos en el punto $(\sigma_n/\sigma_c)=0,22$ determinados con la ayuda del programa RocLab y aplicando el criterio bidimensional de Hoek y Brown. Cabe destacar que al comparar ambos procedimientos los resultados obtenidos son muy similares (ver cuadro C.8 y C.9).

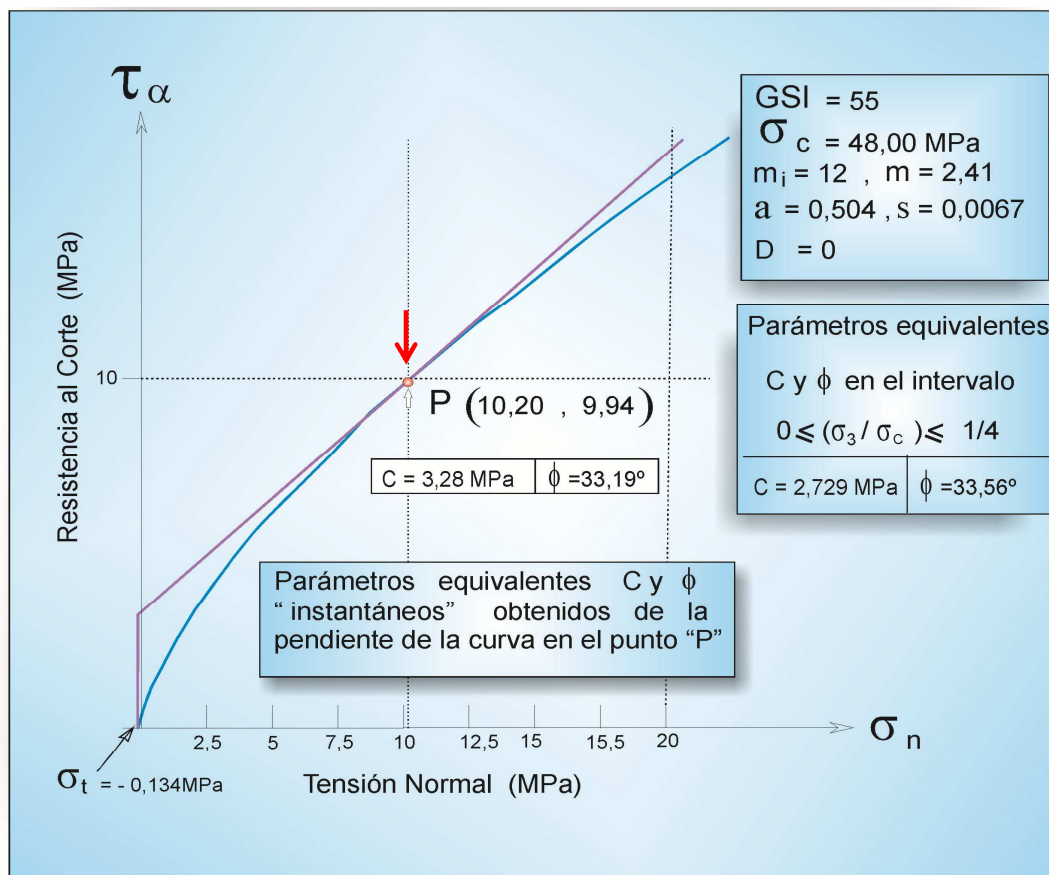


Figura C.2. Determinación de los parámetros de corte aplicando el programa RocLab. a) Valores instantáneos de C y ϕ en el punto P. b) Valores de C y ϕ dentro del intervalo $0 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 1/4$

También, a través de la referida figura y aplicando la metodología analítica desarrollada en el apartado siguiente, se observa que los parámetros resistentes en función del intervalo cerrado $0 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 1/4$ se logran valores muy semejantes al utilizar ambos criterios.

2.2.3. Procedimiento para determinar los parámetros equivalentes C y ϕ (promedios) empleando criterio de rotura Hoek y Brown en función de un conocido intervalo de tensiones.

Aplicando el valor medio de una función y las ecuaciones desarrolladas por Kumar [22] se ha desarrollado un nuevo procedimiento de cálculo para determinar los valores de la resistencia cohesiva y el ángulo de fricción interna equivalentes (valores promedios) mediante la linealización del criterio de rotura de Hoek y Brown con la finalidad de obtener una envolvente del tipo Mohr-Coulomb.

El procedimiento analítico se fundamenta en conocer el intervalo cerrado de tensiones, en función de la tensión principal menor σ_3 , siendo por lo general definido por: $0 \leq (\sigma_3 / \sigma_c) \leq 1/4$.

Los parámetros resistentes se comparan con los resultados del conocido programa RocLab de Rocscience, Inc, el cual lleva a cabo un análisis de la resistencia del macizo rocoso utilizando el criterio de rotura de Hoek y Brown.

Una de las utilidades del programa, entre otras aplicaciones, es que determina los valores equivalentes de la cohesión y del ángulo de rozamiento interno del macizo rocoso (método de la equivalencia de áreas) considerando un nivel máximo de la tensión principal menor efectiva normalizada ($\sigma'_{3n} = \sigma'_{3\max} / \sigma_c$), el cual es aplicado para el caso particular de túneles y taludes.

En este sentido, lo más lógico es considerar un intervalo en el cual la relación σ_3 / σ_c se ajuste lo mejor posible al verdadero campo de esfuerzos el cual esté sometido el macizo rocoso.

Debe señalarse también que la justificación de las ecuaciones desarrolladas para determinar los referidos parámetros resistentes es explicada sin entrar en detalle en una forma muy sucinta a través del artículo: *Hoek-Brown Failure Criterion -2002 Edition*, [10].

Por otro lado, el artículo ha sido traducido al español por el Profesor Carlos López Jimeno y puesto a disposición de los mencionados autores el texto

traducido para su re-publicación en el VI Congreso Suramericano de Mecánica de Rocas- XI Congreso Colombiano de Geotecnia, Cartagena, Colombia, Octubre 8-13 de 2006. El lector puede obtenerlo a través de página: <https://www.roscience.com/assets/files/uploads/7713.pdf>

Como se sabe en el ejemplo anterior, se determinaron los parámetros de corte instantáneos en un punto conocido de la tangente a la envolvente de rotura en función de la tensión normal.

Adicionalmente, se determina a continuación la resistencia cohesiva y el ángulo de fricción interna calculando el valor medio del coeficiente de fricción μ_m teniendo en cuenta un determinado intervalo cerrado, el cual se define en función de la tensión principal menor σ_3 .

La ventaja del procedimiento, es que se conocen C y ϕ a través de un conocido intervalo de tensiones el cual se considera que está sometido el terreno. Para mayor detalle en la tabla C.7 se comparan los resultados con el programa asistido por el ordenador RocLab.

En el referido programa se determinan los parámetros resistentes ajustando la envolvente de Mohr-Coulomb aplicando la opción del programa **General**, el cual considera el siguiente intervalo de tensiones: $0 \leq \sigma_{3n} \leq 1/4$.

Siendo, $\sigma_{3n} = (\sigma_3 / \sigma_c) = 0$, y $\sigma_{3n} = (\sigma_{3max} / \sigma_c) = 1/4$. Este último valor se basa según los mencionados investigadores en la observación empírica de que el rango de esfuerzos asociado con la rotura frágil ocurre para valores de σ_3 inferiores a un cuarto del valor de σ_c .

Previamente se ha indicado que la pendiente de la curva de rotura de Hoek y Brown está definida por la ecuación:

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \sigma_1 = \left[1 + a m \left(m \bar{\sigma}_3 + s \right)^{(a-1)} \right] = \tan^2 \alpha = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \quad (C.30)$$

Por otra parte, al considerar (13), la tangente a la envolvente es:

$$\tan \beta = \frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_n} = \left[\frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) - 1}{2 \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)}} \right] \quad (\text{C.31})$$

Reemplazando $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$ indicado en (C30) en la ecuación anterior resulta:

$$\tan \beta = f(\sigma_3) = \frac{m \cdot a}{2 \sqrt{\left[\left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{2(1-a)} \right] + m \cdot a \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{(1-a)}}} \quad (\text{C.32})$$

Como se sabe el valor medio de (y) con respecto (x), en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ se define por:

$$y_m = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \overbrace{(\tan \beta)_m}^{\mu_m} = \frac{1}{[(\bar{\sigma}_3)_2 - (\bar{\sigma}_3)_1]} \int_{(\bar{\sigma}_3)_1}^{(\bar{\sigma}_3)_2} f(\bar{\sigma}_3) d\bar{\sigma}_3$$

$$\mu_m = (\tan \beta)_m, \quad \bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)$$

Definiéndose además :

$$(\bar{\sigma}_3)_1 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_1 = \text{Límite inferior de la integral definida} \quad (\text{C.33})$$

$$(\bar{\sigma}_3)_2 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_2 = \text{Límite superior de la integral definida}$$

Siendo para el caso investigado:

$(\sigma_3/\sigma_c)_1 = 0$ y el valor de $(\sigma_3/\sigma_c)_2$ variable. Sin embargo se ha considerado para efectos de comparación que: $(\sigma_3/\sigma_c)_2 = 1/4$.

Por otra parte, si se desea calcular el ángulo de fricción interna promedio la ecuación (C33) se transforma en:

$$(\beta)_m = \frac{1}{\left[(\bar{\sigma}_3)_2 - (\bar{\sigma}_3)_1 \right]} \int_{(\bar{\sigma}_3)_1}^{(\bar{\sigma}_3)_2} \arctan f(\bar{\sigma}_3) d\bar{\sigma}_3 \quad (C.34)$$

Lógicamente, el problema se complica al tratar de resolver esta última integral considerando el $\arctan f(\bar{\sigma}_3)$. Sin embargo, la aplicación de programas matemáticos que actualmente existen en el mercado daría como resultado una excelente respuesta.

Este, no es el caso buscado ya que lo que se desea es obtener una simple solución analítica con suficiente o buen grado de aproximación del ángulo $\emptyset$.

Por tanto, para fines prácticos el *valor medio* de $\beta_m = \emptyset_m$ se obtiene a través de $\emptyset_m = \beta_m \approx \arctan(\mu_m)$, siendo, μ el bien conocido coeficiente de rozamiento.

Al resolver la integral empleando (C.32) se obtiene:

$$\mu_m = \overbrace{(\tan \beta)_m}^{\mu_m} = \left(\frac{1}{2(b-a)} \right) \left\{ \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) + \frac{m}{2} \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} \right. \\ \left. - \left(\frac{m}{4} \right) \left[\ln \left(2 \sqrt{ \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) + \frac{m}{2} \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} } + 2 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} + \frac{m}{2} \right) \right] \right\}_{(\sigma_3/\sigma_c)_1}^{(\sigma_3/\sigma_c)_2} \quad (C.35)$$

Al considerar el caso particular que: $(\sigma_3/\sigma_c)_1 = 0$ y $(\sigma_3/\sigma_c)_2 = 1/4$, el valor medio de $(\tan \beta)_m = (\tan \emptyset)_m$, para el referido intervalo se indica en el cuadro siguiente:

Cuadro C.11. Ecuaciones para determinar el coeficiente de rozamiento μ_m .

$$\begin{aligned}
\mu_m &= \overbrace{(\tan\beta)_m}^{\mu_m} = 2(\mu_2 - \mu_1) \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \leq \frac{1}{4} \\
\mu_2 &= \left\{ \sqrt{\left(\frac{m}{4} + s \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{m}{4} + s \right)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{m}{4} \right) \left[\operatorname{Ln} \left(2 \sqrt{\left(\frac{m}{4} + s \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{m}{4} + s \right)^{1/2}} + 2 \left(\frac{m}{4} + s \right)^{1/2} + \frac{m}{2} \right) \right] \right\} \\
\mu_1 &= \left\{ \sqrt{s + \frac{m}{2} (s)^{1/2}} - \left(\frac{m}{4} \right) \left[\operatorname{Ln} \left(2 \sqrt{s + \frac{m}{2} (s)^{1/2}} + 2 (s)^{1/2} + \frac{m}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C.36}$$

El próximo paso consiste en aplicar las ecuaciones de Kumar [22] y determinar la resistencia cohesiva, la cual se obtiene a través de las siguientes ecuaciones indicadas en (C.37).

Por otra parte, en las tablas anexas se comparan los parámetros resistentes equivalentes de C y ϕ (valores promedios) aplicando el procedimiento propuesto con el programa RocLab; utilizando el criterio de rotura de Hoek y Brown.

A través de la Tabla C.7 se puede observar que los parámetros resistentes al utilizar (C36) y (C37) se incrementan en general entre un 4% y 9%. Sin embargo, al considerar un índice de calidad $GSI=100$, hay un aumento de la cohesión cercano al 25% con respecto al referido programa.

Cuadro C.12. Ecuciones de Kumar [22]

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) &= \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{1}{(\tan^2 \beta)_m}} \right) - 1 \right]^{\left(\frac{a}{1-a} \right)} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\tan^2 \beta)_m}} \right) \\
 \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) &= \frac{1}{m} \left(\frac{ma}{2} \right)^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \cdot \left[\left(\sqrt{1 + \frac{1}{(\tan^2 \beta)_m}} \right) - 1 \right]^{\left(\frac{1}{1-a} \right)} \cdot \left(1 + \frac{(\tan \beta)_m}{a \cdot \sqrt{1 + (\tan^2 \beta)_m}} \right) - \left(\frac{s}{m} \right) \\
 C &= \left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) - \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) \cdot (\tan \beta)_m
 \end{aligned} \tag{C.37}$$

Tabla C.7. Parámetros resistentes considerando el intervalo $0 \leq (\sigma_3/\sigma_c) \leq 1/4$.

PARÁMETROS	RESULTADOS DEL PROGRAMA ROCLAB CRITERIO DE ROTURA DE HOEK Y BROWN			
σ_c	48	80	120	150
GSI	55	40	60	100
m_i	12	18	20	25
m	2,406	2,12	4,793	25
s	0,0067	0,0013	0,0117	1
a	0,504	0,511	0,503	0,50
$C(MPa)$	2,729	4,107	8,474	26,23
$\emptyset$	33,56°	32,55°	39,51°	51,99°
PARÁMETROS C Y $\emptyset$ EQUIVALENTES (VALORES PROMEDIOS) APLICANDO EL NUEVO PROCEDIMIENTO PROPUESTO				
$C (MPa)$	2,969	4,305	9,187	32,750
$\beta_m = \emptyset_m$	34,67°	33,94°	40,05°	50,21°
$\tan \beta_m$	0,685	0,6729	0,8526	1,201

Por otro lado, el procedimiento analítico desarrollado permite tomar como valor inicial $(\sigma_3/\sigma_c) \neq 0$, lo que por supuesto es una ventaja.

Por ejemplo, puede ocurrir el caso que se conocen las tensiones del terreno, y que la tensión principal menor (valor inicial) se determina en función del estado confinamiento teniendo en cuenta adicionalmente una estipulada cota inferior del macizo rocoso investigado.

Como se sabe, hay casos en los cuales no necesariamente la tensión principal menor σ_3 (valor inicial) es cero, en especial cuando se desea calcular los referidos parámetros equivalentes a determinadas profundidades en la masa rocosa.

Tabla C.8. Parámetros resistentes obtenidos en el intervalo:
 $(\sigma_3/\sigma_c)_1 = 0$ y $(\sigma_3/\sigma_c)_2 = \text{variable}$.

PARÁMETROS	RESULTADOS DEL PROGRAMA ROCLAB CRITERIO DE ROTURA DE HOEK Y BROWN			
σ_c (MPa)	40	60	80	120
GSI	35	45	55	75
$(\sigma_3/\sigma_c)_1$	0	0	0	0
$(\sigma_3/\sigma_c)_2$	0,10	0,15	0,20	0,25
m_i	10	12	15	20
m	0,981	1,683	3,007	8,190
s	0,0007	0,0022	0,0067	0,0622
a	0,516	0,508	0,504	0,501
C (MPa)	0,849	2,091	4,191	10,748
$\emptyset$	33,35°	34,80°	37,38°	43,88°
PARÁMETROS C Y $\emptyset$ EQUIVALENTES (VALORES PROMEDIOS) APLICANDO EL NUEVO PROCEDIMIENTO PROPUESTO				
C (MPa)	0,881	2,239	4,558	12,242
$\beta_m = \emptyset_m$	34,85°	35,91°	38,28°	44,10°

A continuación, se indican las ecuaciones utilizadas en el Cuadro C.13, cuyos parámetros resistentes se compararan con los resultados del programa

RocLab⁶. Por otro lado, también se lleva a cabo un ejemplo en el cual el valor inicial del cociente $(\sigma_3/\sigma_c)_1 \neq 0$.

Cuadro C.13. Ecuaciones para determinar μ_m , considerando (σ_3/σ_c) variable.

$$\begin{aligned}
 \mu_m &= \overbrace{(\tan \beta)}^{\mu_m}_m = \frac{1}{2(x_2 - x_1)} (\mu_2 - \mu_1) \quad \therefore x_2 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_2, \quad x_1 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_1 \\
 x_1 &= \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_1 = \text{Límite inferior de la tensión principal menor} \\
 x_2 &= \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)_2 = \text{Límite superior de la tensión principal mayor} \\
 \mu_2 &= \left\{ \sqrt{(m \cdot x_2 + s) + \frac{m}{2}(m \cdot x_2 + s)^{1/2}} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{m}{4} \right) \left[\ln \left(2 \sqrt{(m \cdot x_2 + s) + \frac{m}{2}(m \cdot x_2 + s)^{1/2}} + 2(m \cdot x_2 + s)^{1/2} + \frac{m}{2} \right) \right] \right\} \\
 \mu_1 &= \left\{ \sqrt{(m \cdot x_1 + s) + \frac{m}{2}(m \cdot x_1 + s)^{1/2}} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{m}{4} \right) \left[\ln \left(2 \sqrt{(m \cdot x_1 + s) + \frac{m}{2}(m \cdot x_1 + s)^{1/2}} + 2(m \cdot x_1 + s)^{1/2} + \frac{m}{2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{C.38}$$

Un caso práctico considerando que el valor inicial $(\sigma_3 / \sigma_c) \neq 0$.

⁶ Debe señalarse que al aplicar el programa RocLab, los parámetros de corte equivalentes se determinan siempre partiendo que el valor inicial de $(\sigma_3 / \sigma_c)_1 = 0$.

Supóngase que:

$$\left. \begin{array}{ll} GSI & =40 \\ \sigma_c & =35 \text{ MPa} \\ m_i & =12, \\ m & =1,408 \\ s & =0,0013 \\ a & =0,511 \\ D & =0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\sigma_3 / \sigma_c)_1 = 0,05 \\ (\sigma_3 / \sigma_c)_2 = 0,10 \end{array}$$

A través de las ecuaciones (C.37) y (C.38) y empleando la hoja de cálculo Excel se obtienen los siguientes valores:

$$\emptyset = 31,42^\circ$$

$$(C/\sigma_c) = 0,043, \text{ siendo } C = 1,52 \text{ MPa}$$

Cabe indicar que al considerar $(\sigma_3 / \sigma_c)_1 = 0$, resulta:

$$\emptyset = 37,85^\circ$$

$$(C/\sigma_c) = 0,026, \text{ siendo } C = 0,91 \text{ MPa}$$

Estos resultados demuestran la importancia de conocer el intervalo de tensiones que mejor se ajuste a los valores reales.

Finalmente, para completar el estudio en esta sección, y simplemente para apreciar la importancia de la envolvente curva, se analiza nuevamente el criterio de rotura de Hoek y Brown (HB), pero teniendo en cuenta el caso particular en el cual el exponente $a = 1$.

Priest⁷ ha investigado esta condición en su artículo sobre la resistencia de la roca considerando la rotura tridimensional aplicando el criterio de rotura de HB.

Dicho investigador, considera que la expresión lineal simplificada obtenida permite tener una idea de los valores de C y $\emptyset$ correspondiente al límite

⁷ Priest, S (2005) "Determination of Shear Strength and Three-dimensional Yield Strength for the Hoek-Brown Criterion". Rock Mechanics and Rock Engineering, 38(4): pp 299-327.

inferior (*lower limit*). Sin embargo, no es muy recomendable aplicar la ecuación de HB para el caso particular que $a = 1$, por cuanto no representa los verdaderos parámetros resistentes del macizo rocoso al ser éstos constantes, y por ende independientes de la tensión normal σ_n .

Al tener en cuenta que $a = 1$, la ecuación (C.3) se transforma:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)$$

Expresada en forma adimensional con respecto a σ_c resulta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) \quad (C.39)$$

De acuerdo al mencionado investigador la tensión normal, y la resistencia al corte se obtienen a través de las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_3 + \sigma_c \left(\frac{m_f}{2+m} \right) \\ m_f &= \left[\left(\frac{m \cdot \sigma_3}{\sigma_c} \right) + s \right] \\ \tau_\alpha &= \left(\frac{\sigma_c \cdot m_f \cdot \sqrt{1+m}}{2+m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (C.40)$$

Igualmente, determinó los siguientes parámetros resistentes cuando $a = 1$.

$$\left. \begin{aligned} C &= \left(\frac{s \cdot \sigma_c}{2\sqrt{1+m}} \right) \\ \tan\phi &= \left(\frac{m}{2\sqrt{1+m}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (C.41)$$

Al considerar que $\sigma_3 = \sigma_t \implies \sigma_1 = 0$. Por lo tanto, la resistencia a tracción simple utilizando (C.39) puede expresarse como sigue:

$$\sigma_t = -\left(\frac{s \cdot \sigma_c}{1+m}\right) \quad (\text{C.42})$$

Finalmente, otra forma de obtener el ángulo de fricción interna es a través de la pendiente de la recta:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \tan^2 \alpha = (1+m) \quad (\text{C.43})$$

Siendo α el ángulo que forma el plano de rotura con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3 .

Por otra parte, a través de (41), se sabe que:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \tan^2 \alpha \quad (\text{C.44})$$

Igualando las ecuaciones (C.43) y (C.44), se obtiene que el ángulo de fricción interna $\phi = \beta$, es:

$$\beta = \phi = 2 \left(\arctan \sqrt{1+m} - 45^\circ \right)$$

2.3. Criterio de rotura de Johnston y Chiu [24]

Dichos investigadores han desarrollado la siguiente ecuación para roca intacta.

$$\sigma'_{1N} = \left(\frac{M}{B} \sigma'_{3N} + 1 \right)^B \quad (\text{C.45})$$

Expresando los esfuerzos efectivos en forma normalizada en términos de σ_c

$$\sigma'_{1N} = \frac{\sigma'_1}{\sigma_c}, \quad \sigma'_{3N} = \frac{\sigma'_3}{\sigma_c}$$

Donde σ'_1 y σ'_3 corresponden al esfuerzo efectivo principal mayor y menor en el instante de la falla respectivamente.

M y B = constantes de la roca obtenidas experimentalmente.

$$\text{Cuando: } \sigma'_3 = 0, \sigma'_1 = \sigma_c$$

$$\text{Cuando: } \sigma'_1 = 0, \sigma'_3 = \sigma_t, \frac{\sigma_c}{\sigma_t} = -\frac{M}{B} \quad (\text{C.46})$$

Para el caso particular que B=1, resulta:

$$\sigma'_{1N} = (M \sigma'_{3N} + 1) \Rightarrow \frac{\sigma'_1}{\sigma_c} = M \frac{\sigma'_3}{\sigma_c} + 1 \quad (\text{C.47})$$

En estas condiciones, al ser la relación entre las tensiones principales lineal su envolvente también es lineal, obteniéndose la conocida ecuación de Mohr-Coulomb. Siendo, por lo tanto,

$$M = \left(\frac{1 + \tan \phi}{1 - \tan \phi} \right) \quad (\text{C.48})$$

Posteriormente, Johnston [25] determinó mediante regresión por mínimos cuadrados que:

$$\left. \begin{aligned} B &= 1 - 0,0172(\log \sigma_c)^2, \quad \sigma_c (\text{kPa}) \\ M &= 2,065 + 0,276(\log \sigma_c)^2 \\ \text{Cuando } \sigma_c &\rightarrow 1, B \rightarrow 1, \text{ y } M \rightarrow 2,065 \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.49})$$

Es decir, la envolvente o curva de resistencia intrínseca es lineal y al aplicar (C.45), se obtiene un ángulo de fricción interna efectivo de $\varphi' = 20^\circ$. Este valor como lo menciona Parry [26] corresponde a una arcilla blanda normalmente consolidada.

En el caso de una arcilla rígida sobre consolidada con valores de $\sigma_c = 200$ kPa, Johnston determinó que $B = 0,90$. Es decir una envolvente ligeramente curva. En rocas con alta resistencia a compresión ($\sigma_c = 250$ MPa), $B = 0,50$, obteniéndose la familiar curva parabólica.

Mediante el ajuste la función indicada en (C.44), Johnston [25] determinó los siguientes valores para diferentes grupos de roca.

En la tabla adjunta se resumen los valores de las constantes.

$$\begin{aligned}
 \text{Grupo } a &\rightarrow M = 2,065 + 0,170(\log \sigma_c)^2 \\
 \text{Grupo } b &\rightarrow M = 2,065 + 0,231(\log \sigma_c)^2 \\
 \text{Grupo } c &\rightarrow M = 2,065 + 0,270(\log \sigma_c)^2 \\
 \text{Grupo } e &\rightarrow M = 2,065 + 0,659(\log \sigma_c)^2
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Grupo } a \\ \text{Grupo } b \\ \text{Grupo } c \\ \text{Grupo } e \end{aligned}} \right\} \quad (C.50)$$

Tabla C.9. Según Johnston [25]

ROCA	GRUPO	σ_c (MPa)	MEJOR AJUSTE		ECUACIÓN C. 48	ECUACIÓN C.50
			B	M	B	M
Caliza	<i>a</i>	96,00	0,481	7,43	0,573	6,29
Limolita	<i>b</i>	1,30	0,750	6,16	0,833	4,30
Arenisca	<i>c</i>	68,00	0,444	11,40	0,598	8,37
Granito	<i>e</i>	230,00	0,538	15,60	0,505	21,02

2.4. Criterios de Ramamurthy et al [27] y Sheory [28]

En esta sección se describen los trabajos realizados por investigadores de la India, cuyo aporte ha sido de gran importancia en el campo de la mecánica de las rocas.

Ramamurthy ex-profesor del *Indian Institute of Technology* y Sheory *Director of Cental Mining Research Institute* han desarrollado criterios de rotura teniendo en cuenta las discontinuidades de la roca.

Ramamurthy y colaboradores [27] han propuesto la siguiente ecuación:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + a \cdot \sigma_3 \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_3} \right)^b \quad (\text{C.51})$$

Siendo a y b contantes de la roca para la condición intacta.

Adicionalmente, dichos investigadores basándose en un extensivo programa experimental, tanto en roca intacta como conteniendo planos de discontinuidad, lograron determinar una expresión que vincula a σ_{cm} en función de σ_c , junto con un factor de diaclasamiento. Cabe señalar que llevaron a cabo más de 250 ensayos de compresión sin confinar en un ancho rango de resistencia y 1.300 ensayos triaxiales en roca intacta y diaclasada.

Para ello, emplearon una técnica especial variando el número de fracturas e inclinación. Además de testigos de roca utilizaron como material yeso de París, (*plaster of Paris*):

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \exp(-0,008 J_f) \quad (\text{C.52})$$

Siendo:

σ_{cm} = Resistencia a compresión sin confinar de la masa rocosa medida sobre los planos de discontinuidad (*strength of jointed rock*)

Adicionalmente,

$$J_f = \left(\frac{J_n}{n \cdot r} \right) \quad (\text{C.53})$$

J_f = Factor de diaclasamiento. Varía desde cero en roca intacta a 500 en roca muy diaclasada.

J_n = Parámetro que tiene en cuenta la frecuencia de diaclasamiento, y corresponde al número de diaclasas por metro.

n = Parámetro que depende del ángulo de inclinación de la diaclasa β con la vertical.

r = Parámetro relacionado con la resistencia de la roca.

Dichos valores se obtienen a través de las tablas siguientes:

Tabla C.10.

ÁNGULO DE ANISOTROPÍA (°)	VALORES DE (n)	
	FORMA DE U	FORMA DE HOMBRO
0	0,82	0,85
10	0,46	0,60
20	0,11	0,20
30	0,05	0,06
40	0,09	0,12
50	0,30	0,45
60	0,46	0,80
70	0,64	0,90
80	0,82	0,95
90	0,95	0,98

Tabla C. 11.

σ_c (RESISTENCIA A COMPRESIÓN UNIAxIAL DE LA ROCA INTACTA, MPa)	r
2,5	0,30
5,0	0,45
15,0	0,60
25,0	0,70
45,0	0,80
65,0	0,90
100,0	1,00

Para mayor detalle, véase la Fig. C.3, la cual muestra la variación de (n) en función del ángulo de inclinación del plano de diaclasa β con la vertical.

La curva con forma de hombro es predominante en rocas estratificadas o diaclasadas de elevada resistencia. Mientras que la forma en U representa rocas débiles con un plano de estratificación o de diaclasa.

Al considerar los planos de discontinuidad, la resistencia de la masa rocosa a través de ecuación (C.51) puede expresarse en forma más general según [27] como a continuación se indica:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + a_m \cdot \sigma_3 \left(\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_3} \right)^{b_m} \quad (C.54)$$

Siendo,

$$a_m = \frac{a}{0,13} \exp \left(-2,037 \sqrt{\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c}} \right) \quad (C.55)$$

$$b_m = b \sqrt{\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c}}. \quad (C.56)$$

El factor de diaclasamiento J_f expresado en función del índice RMR está definido por la ecuación.

$$J_f / 5 = (100 - RMR) \quad (C.57)$$

Al considerar $RMR=100$, se observa a través de (C.57), (C.56), (C.55) y (C.52) que: $J_f = 0$, $b_m = b$, $a_m = a$ y $\sigma_{cm} = \sigma_c$

$$J_f = 250(1 - 0,30 \log Q) \quad (C.58)$$

Al reemplazar (C.42) en (C.37) se obtiene:

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \exp\left(\frac{RMR - 100}{25}\right) \quad (C.59)$$

Se observa que dicha expresión es muy parecida a la ecuación (C.25), la cual ha sido determinada por Kalamaras y Bieniawski [21].

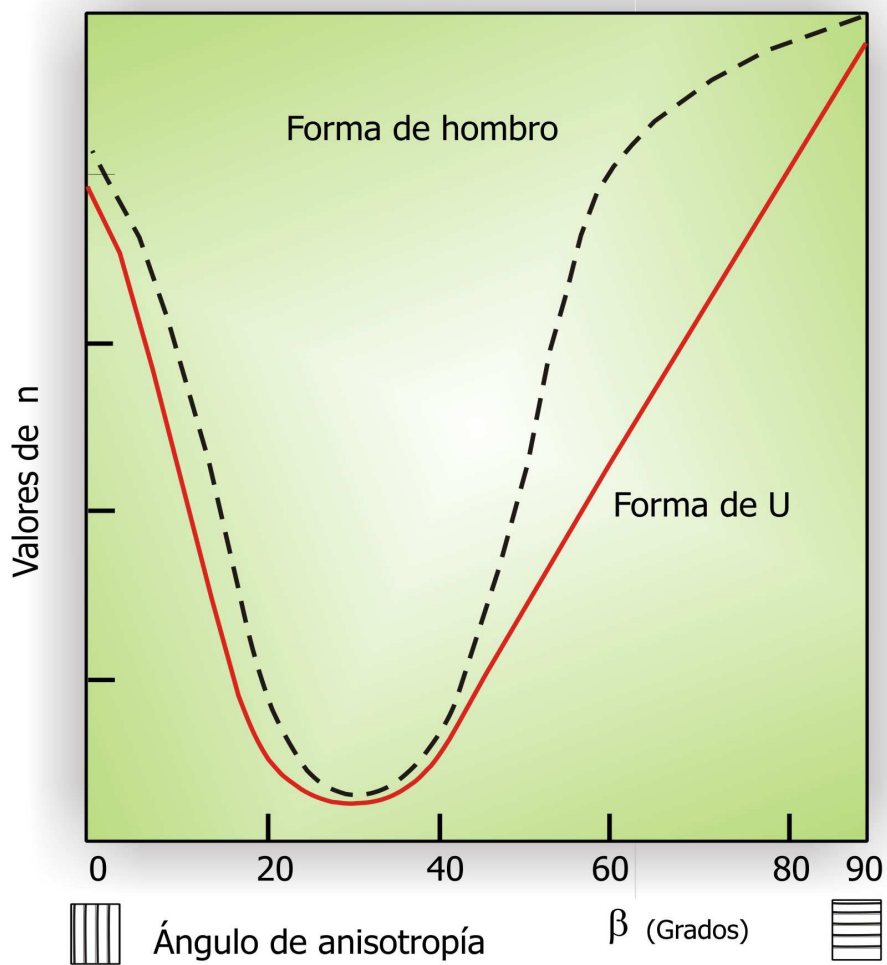


Figura C.3. Variación del parámetro de inclinación (n) en función de la orientación de los planos de discontinuidad, según Ramamurthy et al [27].

Por otra parte, de acuerdo a las investigaciones de Sheorey [28] recomienda el siguiente criterio de rotura.

Roca Intacta (matriz rocosa)

$$\sigma_1 = \sigma_c \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_t} \right)^b \quad (C.60)$$

$$\tau = \tau_s \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^c \quad (\text{C.61})$$

σ_c , σ_t y b son parámetros a ser determinados en la roca intacta a través de las pruebas de laboratorio empleando diferentes niveles de confinamiento:

$$\tau_s = \sqrt{\left(\sigma_c \sigma_t \frac{b^b}{(1+b)^{(1+b)}} \right)} \quad (\text{C.62})$$

$$\mu_0 = \frac{\tau_s^2 (1+b)^2 - \sigma_t^2}{2\tau_s \sigma_t (1+b)} \quad (\text{C.63})$$

$$c = \left(\frac{\sigma_t}{\tau_s} \right) \mu_0^{0,9} \quad (\text{C.64})$$

Masa Rocosa

$$\sigma_1 = \sigma_{cm} \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_{tm}} \right)^{b_m} \quad (\text{C.65})$$

$$\tau = \tau_{sm} \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_{tm}} \right)^{c_m} \quad (\text{C.66})$$

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \exp \left(\frac{RMR - 100}{20} \right) \quad (\text{C.67})$$

RMR= Índice de calidad de Bieniawski-Versión 1976.

$$\frac{\sigma_{tm}}{\sigma_t} = \exp\left(\frac{RMR-100}{27}\right) \quad (C.68)$$

Siendo σ_{tm} la resistencia a tracción de la masa rocosa.

$$b_m = b^{(RMR/100)}, \quad b_m < 0,95 \quad (C.69)$$

$$\tau_{sm} = \sqrt{\left(\sigma_{cm} \cdot \sigma_{tm} \frac{b_m^{b_m}}{(1+b_m)^{(1+b_m)}} \right)} \quad (C.70)$$

$$\mu_{0m} = \frac{\tau_{sm}^2 (1+b_m)^2 - \sigma_{tm}^2}{2 \tau_{sm} \cdot \sigma_{tm} (1+b_m)} \quad (C.71)$$

$$c_m = \left(\frac{\sigma_{tm}}{\tau_{sm}} \right) \mu_{0m}^{0,9} \quad (C.72)$$

2.5. Otros Criterios de rotura

En las secciones anteriores se han mencionado los diferentes criterios de rotura teniendo en cuenta la relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la falla, sin embargo otros autores han desarrollado criterios de resistencia en términos del esfuerzo cortante resistente y la tensión normal actuando sobre un determinado plano de rotura.

De acuerdo al modelo propuesto por Barton [29] y más recientemente por Barton y Choubey [23], se sabe que:

$$\tau = \sigma_n' \tan \left[\phi_b + JRC \log_{10} \left(\frac{JCS}{\sigma_n'} \right) \right] \quad (C.73)$$

Donde:

τ = Resistencia al corte en discontinuidades rugosas.

σ'_n = Tensión normal efectiva (MPa).

ϕ_b = Ángulo básico, varía aproximadamente entre 23° a 38°

JRC = Coeficiente de rugosidad en la discontinuidad $0 \leq JRC \leq 20$.

JRC = 0 (superficie perfectamente suave).

JRC = 20 (superficie muy rugosa).

JCS = Resistencia a compresión de las paredes de la discontinuidad (MPa).

Si las paredes de las discontinuidades no están alteradas o meteorizadas, puede tomarse el valor de la resistencia a compresión simple en la condición intacta σ_c .

Si la pared está alterada, como ocurre en muchos casos, el valor de JCS puede tomarse a través de los resultados del esclerómetro o martillo Schmidt empleando la ecuación: $\log_{10} JCS \approx 0,88 \cdot \gamma R + 1,01$, siendo, γ el peso unitario en MN/m³, JCS en MPa y R el valor del rebote en el esclerómetro.

Se observa que este modelo de rotura bidimensional está fundamentado en la influencia de las rugosidades o asperezas que frecuentemente presentan las discontinuidades. Por lo tanto, las irregularidades de una superficie de fractura consiste en un ángulo de rugosidad (i) al cual se le suma el ángulo básico de fricción para obtener un valor $\phi_p = (i + \phi_b)$. Al no existir cohesión en la discontinuidad resulta la conocida ecuación:

$$\tau = \sigma'_n \cdot \tan \phi_p \quad (C.74)$$

A la vez, el ángulo de rugosidad está definido por la expresión:

$$i = JRC \cdot \log_{10} \left(\frac{JCS}{\sigma'_n} \right) \quad (C.75)$$

Barton y Choubey [23] también mencionan que una vez realizado el ensayo de corte directo sobre un determinado plano de fractura, el área de contacto real puede variar entre una décima a una milésima del área bruta total del plano de discontinuidad.

Por tanto, la relación entre el área bruta sobre la real está íntimamente relacionada con el cociente JCS/σ_n el cual juega un papel preponderante en la resistencia al cizallamiento.

Por ejemplo, si la tensión normal $\sigma_n = 0,10$ MPa y $JCS = 50$ MPa, la relación del área real/área bruta es de dos milésimas. Adicionalmente, cabe destacar, que la magnitud de la tensión normal efectiva actuando sobre el plano de discontinuidad es el factor externo más importante que afecta la resistencia al corte.

El ángulo de fricción interna instantáneo puede calcularse al tener en cuenta que $\phi_i = \arctan(\partial\tau/\partial\sigma_n)$, es decir:

$$\tan \phi_i = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_n} \right) = \tan \left[\phi_b + JRC \log_{10} \left(\frac{JCS}{\sigma_n} \right) \right] - \frac{JRC \pi \log_{10}(2,718281)}{180} \left\{ 1 + \tan^2 \left[\phi_b + JRC \log_{10} \left(\frac{JCS}{\sigma_n} \right) \right] \right\} \quad (C.76)$$

Siendo, por lo tanto, la cohesión instantánea:

$$C_i = \tau - \sigma_n' \tan \phi_i. \quad (C.77)$$

En general, Hoek y Bray [30] señalan que pruebas de laboratorio a través de diferentes ensayos de corte con resultados del ángulo de rugosidad entre 40° a 50° están relacionados con tensiones normales efectivas inferiores a los 0,70 MPa.

Esto demuestra claramente que los valores instantáneos del ángulo de fricción interna son muy altos cuando el campo de tensiones normales efectivas es bajo, por el contrario, dicho ángulo disminuye cuando el estado tensional aumenta.

Este último efecto se debe como resultado del aumento progresivo de la tensión normal, lo que genera que las asperezas sean cortadas o cizalladas y por ende se obtiene una inclinación mucho menor de la envolvente de rotura.

Por otra parte, González de Vallejo et al [12], indican que si se ejerce un esfuerzo cortante sobre la discontinuidad donde actúan tensiones normales bajas, al producirse el corrimiento a favor del plano tiene lugar una dilatación (apertura o separación) de las paredes de la discontinuidad, al tener que exceder el ángulo de rugosidad i para que se genere el desplazamiento, siendo además la cohesión nula o prácticamente nula. Al continuar el desplazamiento tangencial, se pueden romper los bordes más angulosos, limando o suavizando las rugosidades y las dos superficies se ponen en contacto prevaleciendo el valor del ángulo ϕ_b .

Las rugosidades o asperezas presentes en las paredes de las juntas es uno de los aspectos más influyentes en la resistencia friccionante, en particular en planos de fracturas sometidos a esfuerzos normales bajos. Cabe destacar que a través de la ecuación de Barton y Choubey se obtienen ángulos de fricción interna muy altos para tensiones normales de compresión muy bajas actuando sobre el plano de discontinuidad.

En definitiva los valores equivalentes del ángulo de fricción interna ϕ están representados por el ángulo de fricción básico ϕ_b (determinado en una superficie suave aparente) y el ángulo de rugosidad i , el cual depende de las irregularidades que exhiba la masa rocosa, es decir $\phi = (\phi_b + i)$.

Por lo general ϕ_b varía entre 25° y 38° , y el valor del ángulo ϕ suele encontrarse en el rango de 35° a 70° . En este sentido, Barton y Choubey [29] recomiendan truncar los valores de ϕ cuando dicho valor alcanza los 70° .

Igualmente, mencionan que los geólogos expertos en tectónica registran valores de la cohesión de decenas de MPa y ángulos de fricción interna de unos 20° , cuando la roca está sometida a elevadas tensiones normales, mientras que, el ingeniero geotécnico que investiga la estabilidad de taludes obtiene valores del ángulo de fricción interna de 70° y cohesión cero.

También señalan que, en la mayoría de los problemas investigados en el campo de la ingeniería de rocas, es común obtener magnitudes del esfuerzo normal efectivo variando en el rango de 0,10 a 2 MPa (1 a 20 kgf/cm²). Estas cifras, son por lo general alrededor de tres órdenes de magnitud menores que las obtenidas por los geólogos que investigan fallas tectónicas,

es decir, cuando el valor de la tensión normal efectiva se encuentra entre 100 y 2.000 MPa.

2.5.1. Criterio de Henning y Zimmerman

Dreyer [31] en su libro *The Science of Rock Mechanics*, menciona la ecuación propuesta por Henning y Zimmerman, en la cual la resistencia al corte τ_α en función de la tensión normal σ_n está, definida por la ecuación:

$$\tau_\alpha = k(\sigma_n - \sigma_t)^m \quad (C.78)$$

σ_t = resistencia a la tracción (valor negativo).

k, m = parámetros a determinar experimentalmente.

La Figura anexa, según Dreyer [31], muestra la envolvente de rotura a través de ensayos realizados en muestras de roca de la Liniel Salt, cuyos resultados se indican en la tabla C.12. A través de dichos valores, la ecuación que vincula la resistencia al corte con el esfuerzo normal es:

$$\tau_\alpha = 11,20(\sigma_n - \sigma_t)^{0,205}, \text{ MPa} \quad (C.79)$$

Siendo, $\sigma_t = -2,50$ MPa y $\sigma_c = 40,46$ MPa.

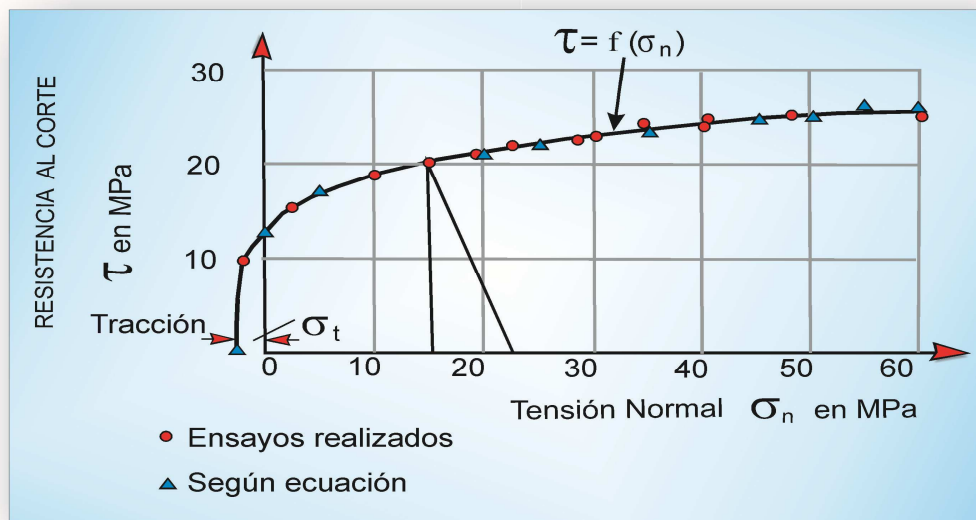


Figura C.4. Envolvente de rotura según Dreyer [31].

Tabla C.12.

TENSIÓN NORMAL σ_n (MPa)	RESISTENCIA AL CORTE τ_u (MPa)
$\sigma_n = \sigma_t = -2,50$	0
-2,00	9,70
0	13,50(Resistencia al corte)
2,50	15,60
5,00	16,90
10,00	18,80
15,00	20,20
20,00	21,20
25,00	22,10
30,00	22,90
35,00	23,60
40,00	24,20
45,00	24,70
50,00	25,20
55,00	25,70
60,00	26,20

Como se ha demostrado previamente en el epígrafe 1.2 del capítulo 1 , los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 pueden expresarse en función de la tensión normal y cortante, junto con la tangente a la envolvente de falla $\tan\beta$, mediante las fórmulas :

$$\sigma_1 = \sigma_n + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha + \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{C.80})$$

Igualmente, el esfuerzo principal menor puede expresarse:

$$\sigma_3 = \sigma_n + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha - \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{C.81})$$

Siendo la pendiente al considerar (C.78)

$$\tau'_\alpha = \frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_n} = \tan \beta = \frac{mk}{(\sigma_n - \sigma_t)^{(1-m)}} \quad (\text{C.82})$$

Por lo tanto, al considerar que $\tau'_\alpha = \tan \beta$, (C.80) y (C.81) toman la forma:

$$\sigma_1 = \sigma_n + \tau_\alpha \left(\tan \beta + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) = \sigma_n + \tau_\alpha (\tan \beta + \sec \beta) \quad (\text{C.83})$$

$$\sigma_3 = \sigma_n + \tau_\alpha \left(\tan \beta - \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) = \sigma_n + \tau_\alpha (\tan \beta - \sec \beta) \quad (\text{C.84})$$

Reemplazado (C.78) y (C.82) en las dos últimas ecuaciones, se obtiene finalmente las tensiones principales en función del esfuerzo normal y los parámetros k y m :

$$\sigma_1 = \sigma_n + m \cdot k^2 \cdot (\sigma_n - \sigma_t)^{(2m-1)} + k (\sigma_n - \sigma_t)^m \sqrt{1 + m^2 k^2 (\sigma_n - \sigma_t)^{(2m-1)}} \quad (\text{C.85})$$

$$\sigma_3 = \sigma_n + m \cdot k^2 \cdot (\sigma_n - \sigma_t)^{(2m-1)} - k (\sigma_n - \sigma_t)^m \sqrt{1 + m^2 k^2 (\sigma_n - \sigma_t)^{(2m-1)}} \quad (\text{C.86})$$

Una forma más práctica de utilizar la ecuación C.78, es expresarla en forma adimensional. En estas condiciones se tiene:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{k}{\sigma_c} \right) (\sigma_n - \sigma_t)^m \quad (\text{C.87})$$

La cual equivale a escribir,

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{k}{\sigma_c} \right) \left(\frac{\sigma_n - \sigma_t}{\sigma_c} \right)^m (\sigma_c)^m \quad (\text{C.88})$$

Llamando, $\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)$ y $\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right)$

$$\bar{\tau}_\alpha = k (\sigma_c)^{(m-1)} \left(\bar{\sigma}_n - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^m \quad (\text{C.89})$$

Resultando finalmente,

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = k_1 \left(\bar{\sigma}_n - \xi \right)^m \quad (\text{C.90})$$

Siendo,

$$\xi = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \quad \text{y} \quad k_1 = k(\sigma_c)^{(m-1)} \quad (\text{C.91})$$

ξ es negativo, por cuanto en el sistema de convención utilizado se considera que los esfuerzos de tracción son negativos.

Cabe señalar que la ecuación (C.90) es exactamente igual a la utilizada por Hoek y Brown [9] en su criterio original de rotura.

Dichos autores al no poder hallar la envolvente analíticamente en función de su criterio original de rotura $\sigma_1 = f(\sigma_3, \sigma_c, m, s)$, aplicaron la fórmula:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = A \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} - \xi \right)^B \quad (\text{C.92})$$

Es decir, $A = k_1$ y $B = m$.

2.5.2. Cálculo de las constantes k_1 y m

Los valores de k_1 y m indicados en (C.90) pueden obtenerse con buena aproximación conociendo $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$ conjuntamente con las ecuaciones (C.85) y (C.86), y agregando una tercera ecuación vinculada con la tensión normal σ_n como a continuación se indica:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha \quad (\text{C.93})$$

Al dividir la ecuación anterior por la resistencia a compresión sin confinar σ_c resulta,

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = \bar{\sigma}_1 \cos^2 \alpha + \bar{\sigma}_3 \sin^2 \alpha \quad (\text{C.94})$$

Siendo, además,

$$\bar{\sigma}_1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right), \quad \bar{\sigma}_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)$$

Para el caso particular que $\sigma_1/\sigma_c=1$, $\sigma_3/\sigma_c=0$, y teniendo en cuenta que $\alpha=(45^\circ+\beta/2)$, la ecuación (C.93) se transforma:

$$\bar{\sigma}_n = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)_{\sigma_3=0} = \cos^2 \alpha = \left(\frac{1 - \sin \beta}{2} \right) = \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \right) \quad (\text{C.95})$$

Por lo tanto:

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{(\sigma_n/\sigma_c)} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(\bar{\sigma}_n)_{\sigma_3=0}} - 1} \quad (\text{C.96})$$

Por otra parte, la relación entre α y el ángulo de inclinación β que forma la tangente a la envolvente de rotura con la horizontal se puede observar a través de la Fig. (1) correspondiente al capítulo 1. Adicionalmente es posible escribir las siguientes expresiones trigonométricas:

$$2\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \Rightarrow \tan \beta \cdot \tan 2\alpha = -1$$

$$\tan \beta = \left(\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \right) \quad (\text{C.97})$$

Al reemplazar el valor de $\tan \alpha$ en (C.97), resulta:

$$\tan \beta = \left(\frac{\frac{1}{(\sigma_n/\sigma_c)^{-2}}}{2\sqrt{\frac{1}{(\sigma_n/\sigma_c)^{-1}}-1}} \right) \quad (C.98)$$

Igualando (C.82) y (C.98) se obtiene:

$$\tan \beta = \left(\frac{\frac{1}{(\sigma_n/\sigma_c)^{-2}}}{2\sqrt{\frac{1}{(\sigma_n/\sigma_c)^{-1}}-1}} \right) = \frac{mk}{(\sigma_n - \sigma_t)^{(1-m)}} \quad (C.99)$$

Recordando que $k_1 = k(\sigma_c)^{(m-1)}$ y $\xi = (\sigma_t/\sigma_c)$, queda finalmente:

$$\frac{\left[1 - 2 \cdot (\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right]}{2\sqrt{(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \cdot \left(1 - (\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right)}} = k_1 \cdot m \left((\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} - \xi \right)^{(m-1)} \quad (C.100)$$

En estas condiciones, al considerar (C.100) junto con (C.85) y (C.86) expresadas adimensionalmente para el caso que $(\sigma_1/\sigma_c)=1, (\sigma_3/\sigma_c)=0$, se han obtenido tres ecuaciones con tres incógnitas: k_1 , m y $(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0}$ es decir:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \overline{\sigma_n} + m \cdot k_1^2 \cdot (\overline{\sigma_n} - \xi)^{(2m-1)} + k_1 (\overline{\sigma_n} - \xi)^m \sqrt{1 + m^2 k_1^2 (\overline{\sigma_n} - \xi)^{(2m-1)}} \\ 0 &= \overline{\sigma_n} + m \cdot k_1^2 \cdot (\overline{\sigma_n} - \xi)^{(2m-1)} - k_1 (\overline{\sigma_n} - \xi)^m \sqrt{1 + m^2 k_1^2 (\overline{\sigma_n} - \xi)^{(2m-1)}} \\ \frac{\left[1 - 2 \cdot (\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right]}{2\sqrt{(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \cdot \left(1 - (\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} \right)}} - k_1 \cdot m \left((\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} - \xi \right)^{(m-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (C.101)$$

2.5.3. Comparación con los valores de k y m obtenidos de acuerdo a Dreyer [31]

Los parámetros de corte obtenidos por Dreyer [31] en muestras de roca de la Liniel Salt indicados en la Tabla C.12 son $k = 11,20$ y $m = 0,205$. Al emplear (C.78) la ecuación resultante es:

$$\tau_{\alpha} = 11,20 (\sigma_n - \sigma_t)^{0,205}, MPa$$

Adicionalmente se conoce que:

$$\sigma_c = 40,46 MPa$$

$$\sigma_t = -2,50 MPa \quad \therefore \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) = -0,062$$

Por otra parte, a través de la solución propuesta del sistema de ecuaciones no lineales indicado en (C.101), los valores de los parámetros k_1 , m y $(\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0}$ al aplicar el programa *Engineering Equation Solver (EES)* son los siguientes:

$$k_1 = 0,5898, m = 0,2385, (\overline{\sigma_n})_{\sigma_3=0} = 0,315$$

A través de (C.91) la constante k es:

$$k = \frac{k_1}{(\sigma_c)^{(m-1)}} = \frac{0,5898}{(40,46)^{-0,7615}} \approx 9,87$$

Con dichos valores la ecuación (C.78) y (C.90) toman la forma,

$$\tau_{\alpha} = 9,87 (\sigma_n - \sigma_t)^{0,2385}, MPa \quad (C.102)$$

Al expresarla adimensionalmente resulta:

$$\bar{\tau}_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = 0,5898 \left(\bar{\sigma}_n - \xi \right)^{0,2385} \quad (C.103)$$

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right)_{\sigma_3=0} = 0,3715 \Rightarrow \sigma_n = 0,3715 \cdot \sigma_c = 15 \text{ MPa}$$

$$\text{Resultando que: } (\tau_\alpha)_{\sigma_3=0} = 9,87 (15,00 - \sigma_t)^{0,2385} = 19,50 \text{ MPa}$$

La inclinación de la envolvente en el punto $(\sigma_n, \tau_\alpha) = (15, 19,50)$ MPa cuando $\sigma_3 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_c$ al aplicar (C.95), es por tanto:

$$(1 - \sin \beta) = 2 \left(\bar{\sigma}_n \right)_{\sigma_3=0} = 0,743 \therefore \beta = 14,89^\circ$$

Al utilizar las constantes obtenidas por Dreyer, el valor de k_1 es:

$$k_1 = k \left(\sigma_c \right)^{(m-1)} = 11,20 \cdot (40,46)^{(0,205-1)} = 0,5911$$

En forma adimensional, la ecuación de Dreyer al emplear (C.90) toma la forma:

$$\bar{\tau}_\alpha = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = 0,5911 \left(\bar{\sigma}_n - \xi \right)^{0,205} \quad (C.104)$$

Finalmente, en la tabla anexa se comparan las ecuaciones (C.79) y (C.102), observándose una buena aproximación al resolver el sistema de ecuaciones no lineales indicados en (C.101) y conociendo que $\xi = (\sigma_t / \sigma_c)$.

$$\tau_{\alpha} = 11,20 (\sigma_n - \sigma_t)^{0,205}$$

$$\tau_{\alpha} = 9,87 (\sigma_n - \sigma_t)^{0,2385}$$

Tabla C.13.

TENSIÓN NORMAL σ_n (MPa)	VALORES DE DREYER τ_{α} (MPa)	SOLUCIÓN APROXIMADA τ_{α} (MPa)
$\sigma_n = \sigma_t = -2,50$	0	0
-2,00	9,70	8,40
0	13,50	12,30
2,50	15,60	14,50
5,00	16,90	16,00
10,00	18,80	18,00
15,00	20,20	19,50
20,00	21,20	20,70
25,00	22,10	21,80
30,00	22,90	22,60
35,00	23,60	23,40
40,00	24,20	24,10
45,00	24,70	24,80
50,00	25,20	25,40
55,00	25,70	25,90
60,00	26,20	26,50

3. INFLUENCIA Y APLICACIÓN DE LA INVARIANTES DE ESFUERZOS EN LA ROTURA DE LAS ROCAS. COMPORTAMIENTO FRÁGIL Y DÚCTIL

3.1. Introducción

Antes de continuar con los criterios de rotura en tres dimensiones en las secciones siguientes, es importante considerar en forma sucinta algunos aspectos concernientes con las invariantes I_1, I_2, I_3 del tensor de esfuerzos σ_{ij} y las invariantes J_1, J_2, J_3 del tensor desviador S_{ij} . Como se sabe, las tensiones octaédricas se utilizan para predecir la resistencia de las rocas y otros materiales, además de su vinculación con las invariantes I_1 y J_2 . Es por ello el interés de estudiar las tensiones que actúan en estos planos octaédricos.

Se conoce como plano octaédrico aquél cuya normal forma ángulos iguales con los ejes principales. Por otra parte, en cada punto del sólido existen ocho planos que cumplen con la referida definición, formando un octaedro. A las componentes normal y tangencial del vector de tensión en un plano octaédrico se le denota como tensiones octaédricas, y son iguales en cada una de las caras del octaedro.

A la vez el tensor σ_{ij} se puede descomponer de forma unívoca en una parte esférica que genera cambios de volumen y otra desviadora. El tensor esférico tiene la misma traza que σ_{ij} y el tensor desviador S_{ij} , no tiene traza ($J_1=0$).

La invariante I_1 es igual a cada uno de los tres elementos de la diagonal del tensor esférico, siendo el esfuerzo normal octaédrico $\sigma_{oct}=I_1/3$. Adicionalmente, la invariante J_2 está vinculada con la tensión tangencial octaédrica $\tau_{oct}=[(2/3).J_2]^{1/2}$ y por ende con los cambios de forma (distorsión) en la roca.

En este punto es importante resaltar los comentarios de Fliess⁸ en su libro de estabilidad en relación a los ensayos realizados por Bridgman, quien demostró la inexactitud de la teoría de rotura para el caso de *energía total de deformación*.

⁸ Fliess, E (1971) "Estabilidad –Segundo Curso". Editorial Kapelusz. 626 p. Buenos Aires.

A través de sus ensayos se alcanzaron presiones triaxiales hidrostáticas muy elevadas con energías de deformación total superiores a los valores de fluencia que la correspondiente a la sollicitación simple, sin que se observaran indicios del comienzo de corrimiento plástico. En este sentido, Fliess⁵, menciona:

La naturaleza nos da un ejemplo de la inexactitud de la referida teoría, pues si se considera guijarros sumergidos en las fosas marinas más profundas, prácticamente puede admitirse que las tres tensiones principales son iguales y de elevado valor y sin embargo no sufren efecto alguno.

Lógicamente, lo previamente mencionado lleva a la conclusión de que no toda la energía de deformación influye en el comienzo de la fluencia de los materiales, dando como resultado la teoría de la máxima energía de distorsión, denominada también teoría de Huber-Hencky y von Mises. Dicha teoría considera que en un material sujeto a un estado de tensiones, el comienzo de la fluencia en un determinado punto del cuerpo ocurre cuando la energía de distorsión por unidad de volumen alcanza la sollicitación por tracción simple, cuando se logra el límite de fluencia.

En estas condiciones si se cumple que $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, la energía de distorsión es nula y la totalidad de la energía absorbida corresponde al cambio de volumen. Por lo tanto, al no existir energía de distorsión, según la mencionada teoría, no puede generarse el comienzo de la fluencia, y no existe rotura. A todo esto hay que agregar la ventaja de poder determinar la energía máxima de distorsión a través de los criterios de rotura de Mohr – Coulomb, Drucker - Prager y Hoek y Brown⁹, entre otros.

Cabe señalar, que la energía de distorsión se utiliza también como un índice para entender mejor la estabilidad de las estructuras de roca teniendo en cuenta además su calidad, y el campo de tensiones antes y después de llevar a cabo la excavación del macizo rocoso.

Por otra parte, no puede asegurarse que exista una única teoría que justifique cómo y porqué rompen los materiales, los cuales se agrupan en dos grandes grupos, frágiles y dúctiles. Las distintas teorías de rotura han sido

⁹ Úcar, R "Diseño del Sosténimiento de Túneles a través de la Energía de Distorsión Almacenada en el Terreno". Capítulo publicado en el libro 3, IngeoTúneles, Serie: Ingeniería de Túneles, Editor Carlos López Jimeno. Madrid, 2000.

desarrolladas teniendo en cuenta varios estados de tensiones. Para un estado simple de esfuerzo el problema es establecer la seguridad a la rotura es sencillo, pues sólo se requiere determinar la tensión que produce la rotura por compresión, tracción o corte, y luego aplicar un criterio con respecto a la seguridad que se dispone.

En cambio, el problema se complica al considerar el macizo rocoso sujeto a un estado bidimensional o tridimensional. En definitiva, muchos investigadores mencionan que lo más correcto es decir que el material ha alcanzado la rotura cuando llega a un límite de sollicitación tal que las tensiones producen un valor para el cual la estructura investigada ha dejado de cumplir su función resistente para el fin que ha sido diseñado.

También, hay que tener presente que el comportamiento mecánico de las rocas depende de varios factores como su composición mineralógica, microestructura, así como otras variables relacionadas con la presión de fluido, temperatura y el nivel del estado tensional, entre otros.

En el caso del comportamiento frágil, la roca se caracteriza por una relación inicial elástica, que luego en la vecindad o cercanía del punto cedente (*yield point*)¹⁰ se produce un cambio muy rápido en la pendiente de la curva tensión-deformación, seguida por una pérdida apreciable de la cohesión y caída del esfuerzo diferencial ($\sigma_1 - \sigma_3$) o σ_1 . También debe indicarse que no existe deformación plástica y la fractura es súbita.

Adicionalmente, al estar la roca sometida a un estado de presiones de confinamiento y temperaturas bajas, su comportamiento es frágil y se manifiesta por la formación de fracturas cuyos tipos principales de estructuras geológicas están representadas por fallas y diaclasas.

Por otro lado, el comportamiento dúctil se caracteriza por una deformación permanente después del punto cedente. Adicionalmente, la ductilidad de los materiales tiene la habilidad de sufrir grandes deformaciones permanentes sin fracturarse, Mogi [32] en su libro menciona que no hay una propuesta universal para medir numéricamente la ductilidad. En este sentido,

¹⁰ El punto cedente (*Yield Stress*), es el diferencial ($\sigma_1 - \sigma_3$) o σ_1 en el comienzo de la deformación permanente. Sin embargo, en algunas rocas no es preciso definir su valor. Por lo tanto, el esfuerzo correspondiente para deformaciones pequeñas permanentes se toma en estos casos el 0,2%.

recomienda la propuesta de Hundin, en la cual la deformación total permanente previa a la fractura debe considerarse como una medida relativa de la ductilidad, la cual se cuantifica como un porcentaje del alargamiento.

A la vez, cabe señalar que a mayor profundidad donde las condiciones de temperatura y presión son altas, se desarrollan nuevos procesos de recristalización que generan diferentes minerales y disolución de otros de la masa de roca que se han deformado dúctilmente produciendo granos alargados de estructura foliada que son las llamadas milonitas.

Al considerar el comportamiento frágil y dúctil de la roca es de interés como lo mencionan Oyarzun y Doblas, a través de su estudio: Fallas y Zonas de Cizalla (Parte I): Aspectos Generales¹¹, ciertos aspectos fundamentales relacionados con las fallas, zonas de falla y zonas de cizalla. La falla como se sabe, y sin entrar en detalle es una fractura frágil sobre la cual ha ocurrido un desplazamiento apreciable a través de una superficie que separa dos bloques, y cuya clasificación depende de la posición de las tensiones principales. Por otro lado, la zona de falla está constituida por un sinnúmero de fallas subparalelas e interconectadas, las cuales abarcan zonas de brechas.

La zona de cizalla corresponde a un ancho sector de deformación producido bajo condiciones dúctiles a dúctiles-frágiles, la cual pasa hacia la zona de falla. Por lo tanto, las rocas se deforman frágilmente en los niveles superiores y dúctilmente hacia los niveles inferiores. Los mencionados investigadores, también indican que la profundidad de transición en la cual la deformación traspasa de frágil a dúctil puede considerarse aproximadamente como un valor de referencia unos 10 a 15 km bajo la superficie, por cuanto existe la posibilidad de encontrar deformación dúctil a profundidades menores como resultado de un elevado gradiente geotérmico debido a magmatismo activo o acción hidrotermal.

En cuanto a la transición de roca frágil a dúctil, Mogi [32] indica que con el incremento de la presión confinante se eleva el tránsito a roca dúctil.

La Fig. C.5 muestra según el mencionado autor el comportamiento de la roca frágil a dúctil en un ensayo convencional de compresión triaxial, observándose una línea frontera en la cual $(\sigma_1 - \sigma_3) = 4\sigma_3$.

¹¹ <http://www.uclm.es/users/higuera/yymm/fallas/FallasPrimeraParte.htm>

Finalmente, la Fig. C.6, muestra de acuerdo a B. Van Pluijm y S. Marshak, la envolvente de Mohr para diferentes campos de tensiones y la deformación de la roca al incrementarse la presión de confinamiento (véase *Earth Structure An Introduction to Structural Geology and Tectonic* <http://www.globalchange.umich.edu/ben/ES/>).

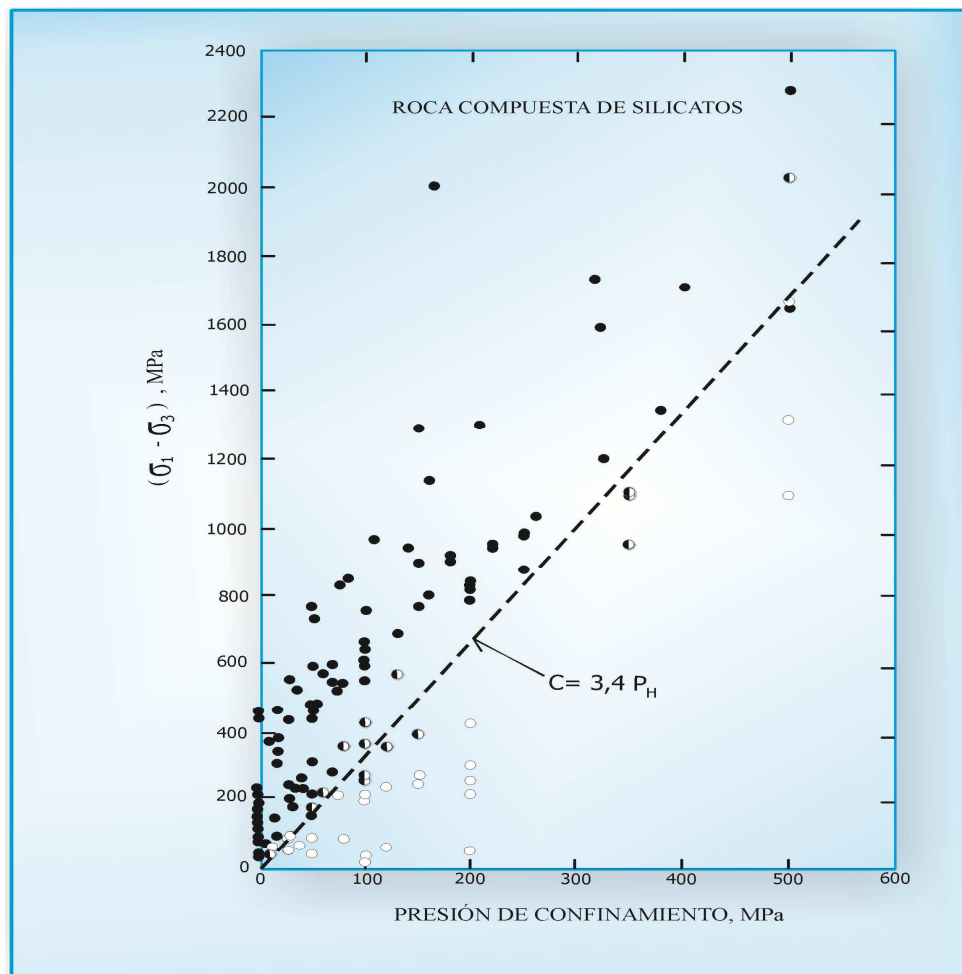


Figura C.5. Rotura de la roca compuesta por silicatos a diferentes presiones de confinamiento, mostrando la recta de transición $(\sigma_1 - \sigma_3) = 4\sigma_3$, según Mogi [32].

Los círculos oscuros corresponden a la región de comportamiento frágil. Los círculos blancos a un estado dúctil. Los semi-círculos oscuros definen la zona de transición.

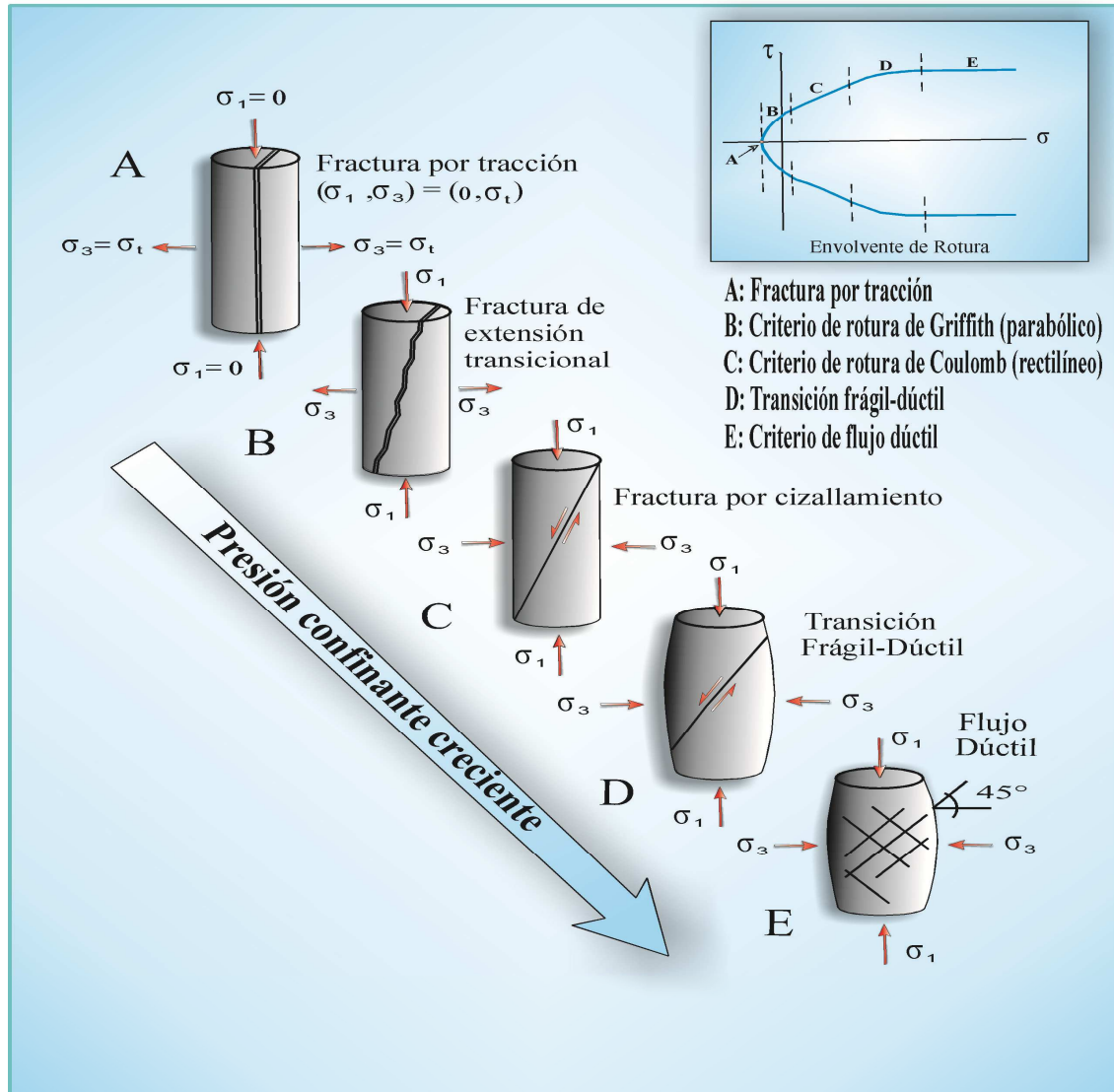


Figura C.6. Esquemas de las diferentes geometrías de fractura según van der Pluijm y Marshak (2004).

3.2. Consideraciones generales

Teniendo en cuenta que el campo tensional en un punto del sólido está definido por el tensor de esfuerzos σ_{ij} , un criterio de plastificación corresponde a una ley que defina el límite del comportamiento elástico de la masa de suelo o roca.

En estas condiciones es necesario obtener una ley que permita expresar una determinada función de la forma:

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = C \quad (C.105)$$

C = constante (valor crítico).

Si el valor de la función en cualquier punto es menor que (C), es decir:

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) < C \quad (C.106)$$

El material se comporta elásticamente sin que haya ocurrido plastificación. Por otro lado, se ha podido comprobar que una forma más conveniente de expresar dicha función es a través de los esfuerzos principales, y por ende en términos de las invariantes de esfuerzos. Adicionalmente, un procedimiento común para describir la rotura se basa en considerar diferentes combinaciones de las invariantes de esfuerzos.

Como se sabe, para el caso particular de un material isótropo, las propiedades mecánicas no dependen de la dirección en que se calculen o midan. Por lo tanto, no hay dentro del sólido investigado ninguna dirección que predomina sobre las otras. En estas condiciones, es favorable expresar un criterio de plastificación en función de las invariantes, ya que no dependen del sistema de referencia. Considerando inicialmente las tensiones principales, se tiene:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad (C.107)$$

Y en función de las invariantes:

$$f(I_1, J_2, J_3) = C \quad (C.108)$$

Una forma muy útil y ventajosa como se apreciará más adelante es representar los diferentes criterios de plastificación en función de las invariantes utilizando las coordenadas Haigh –Westergaard (ξ, ρ, θ).

$$\boxed{\begin{aligned} f(\xi, \rho, \theta) &= 0 \\ \xi &= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{I_1}{3} \right), \quad \rho = \sqrt{2 J_2} \\ \theta &= \text{ángulo de Lode} \end{aligned}}$$

Siendo,

$$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (C.109)$$

I_1 = Primera invariante de esfuerzos del tensor σ_{ij}

J_2 = Segunda invariante de esfuerzos del tensor desviador S_{ij}

J_3 = Tercera invariante de esfuerzos del tensor desviador S_{ij}

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (C.110)$$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ = tensiones normales (el primer subíndice indica la dirección normal al plano donde actúa el esfuerzo y el segundo subíndice la dirección del eje al cual es paralela a la componente normal del esfuerzo).

Lógicamente, en el caso de las tensiones normales ambos subíndices coinciden.

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ = tensiones tangenciales (nuevamente el primer subíndice indica la dirección normal al plano en que actúa la componente tangencial del esfuerzo, cuya dirección es paralela al eje que indica el segundo subíndice).

Por otra parte, al considerar lo previamente indicado, es conveniente descomponer el tensor de esfuerzos σ_{ij} en dos partes, la primera

correspondiente al tensor hidrostático* o esférico, y la otra llamada tensor desviador S_{ij} .

El tensor esférico está definido por los elementos $\sigma_m \cdot \delta_{ij}$, siendo σ_m la tensión normal media y δ_{ij} el delta de Kronecker, es decir:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad (C.111)$$

El valor de σ_m se conoce también como tensión normal octaédrica ($\sigma_m = \sigma_{oct}$). Este estado de tensión representado por σ_m es el responsable que se originen cambios de volumen en el material.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\sigma_m \delta_{ij} = \sigma_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (C.112)$$

En estas condiciones:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_m \cdot \delta_{ij} \quad (C.113)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \cdot \delta_{ij} \quad (C.114)$$

Resultando por tanto:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_m) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_m) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_m) \end{pmatrix} \quad (C.115)$$

Que equivale a la notación:

* Tratándose de masas de suelo o de roca es más conveniente llamarlo isostático. Suppe, J. (1985) "Principles of Structural Geology", 537 p.

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma_m) \end{pmatrix} \quad (C.116)$$

A la vez, debe indicarse que el tensor de esfuerzo desviador S_{ij} corresponde a un estado de esfuerzo cortante puro¹². Nótese además que $S_{ij} = \sigma_{ij}$, cuando $i \neq j$. Por otro parte, el tensor desviador en función de los esfuerzos principales es:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_m) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_m) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_m) \end{pmatrix} \quad (C.117)$$

$$= S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{pmatrix} \quad (C.118)$$

Sin lugar a dudas el tensor desviador juega un papel muy importante en la relación tensión-deformación, tanto para materiales elásticos y plásticos; siendo el responsable que se produzcan cambios de forma, es decir, distorsión en el material ya que su primera invariante es nula.

Finalmente, los valores de las tensiones se obtienen a través de la expresión:

$$\det |S_{ij} - S\delta_{ij}| = 0 \quad (C.119)$$

¹² Esto implica que para un estado de esfuerzos S_{ij} en un punto P del sistema de coordenadas X_i , existe un sistema de coordenadas x'_i tal que $S'_{11} = S'_{22} = S'_{33} = 0$.

Siendo, además, una condición necesaria y suficiente para el estado de esfuerzo cortante puro que: $S_{ii} = J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$.

$$S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (C.120)$$

Siendo J_1 , J_2 y J_3 las invariantes de esfuerzos del tensor desviador:

$$J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad (C.121)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ji} = \frac{1}{2} [S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + S_{12} \cdot S_{21} + S_{21} \cdot S_{12} + S_{13} \cdot S_{31} + S_{31} \cdot S_{13} + S_{23} \cdot S_{32} + S_{32} \cdot S_{23}]$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2 S_{12}^2 + 2 S_{23}^2 + 2 S_{31}^2)$$

$$J_2 = -(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_3 \cdot S_1)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3} (I_1^2 - 3I_2)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} \cdot S_{jk} \cdot S_{ki} = \begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma_m) \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$$

$$J_3 = \frac{1}{27} (2I_1^3 - 9I_1 \cdot I_2 + 27I_3)$$

La ecuación cúbica indicada a través de (C.120) puede resolverse sin dificultad con la ayuda de la siguiente expresión trigonométrica:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0 \quad (\text{C.125})$$

Considerando el cambio de variable: $S = R \cdot \cos(\theta)$.

La ecuación (C.120) se transforma:

$$\cos^3 \theta - \frac{J_2}{R^2} \cos \theta - \frac{J_3}{R^3} = 0 \quad (\text{C.126})$$

Al comparar (C.125) y (C.126) resulta:

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}} (\sqrt{J_2}) \quad (\text{C.127})$$

Siendo además:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3 \quad (\text{C.128})$$

Adicionalmente, la tensión tangencial octaédrica τ_{oct} (ver Fig. C.7) puede relacionarse a través de la invariante de esfuerzo J_2 utilizando la expresión:

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (\text{C.129})$$

Sin lugar a dudas, la tensión tangencial octaédrica y la máxima son dos de los esfuerzos cortantes que intervienen en forma muy importante en la fluencia y rotura de metales. Igualmente Mogi [32] considera en su criterio de rotura en rocas el efecto de la tensión tangencial octaédrica τ_{oct} . Por otra parte, Chen y Saleeb [40] demuestran en forma concisa que la relación $\tau_{\text{oct}}/\tau_{\text{max}}$ se encuentra en el intervalo:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0,816 \leq \left| \frac{\tau_{\text{oct}}}{\tau_{\text{max}}} \right| \leq 0,943 = 2 \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$$

Adicionalmente, cabe destacar que (θ) se conoce como ángulo de similitud o de Lode (en reconocimiento al ingeniero alemán W. Lode, 1926). Se encuentra en el plano desviador y corresponde al ángulo entre la proyección de σ_1 sobre el plano desviador σ'_1 (véase Fig. C.8) y el vector de esfuerzos desviador $[S_1, S_2, S_3]$.

Por otro lado, la dirección del esfuerzo tangencial octaédrico está definido por el ángulo de similitud θ , el cual está relacionado con las invariantes de esfuerzos J_2 y J_3 , tal como lo mencionan Chen y Saleeb [40] y Chen [41].

Por tanto, al tener en cuenta (C.129) y (C.128) queda:

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \left(\frac{J_3}{\tau_{\text{oct}}^3} \right) \quad (\text{C.130})$$

La selección de la alternativa de las invariantes I_1 , J_2 y θ (ángulo de Lode), es decir $(\sigma_{\text{oct}}, \tau_{\text{oct}}, \theta)$, tiene la ventaja que permite la evaluación directa de los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 , en lugar de resolver la engorrosa ecuación cúbica. A la vez, las invariantes I_1 y J_2 están directamente relacionadas con $\sigma_m = \sigma_{\text{oct}}$ y τ_{oct} respectivamente. En estas condiciones los esfuerzos principales desviadores a través de (C.109) y (C.111) son:

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (\text{C.131})$$

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (\text{C.132})$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (\text{C.133})$$

Finalmente, al considerar las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) en función de $\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = I_1/3$ y los esfuerzos desviadores, S_1, S_2 y S_3 , se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \end{Bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \\ \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \\ \sigma_{oct} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.134)$$

Se llaman tensiones octaédricas las tensiones actuando sobre planos cuya normal forma ángulos iguales con los tres ejes principales de esfuerzos.

$$T_i = \sigma_{ij} n_j, i = 1, 2, 3$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{oct}$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3}$$

$$T^2 = \tau_{oct}^2 + \sigma_{oct}^2 \Rightarrow \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

$$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = \sigma_1 / \sqrt{3}$$

$$T_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = \sigma_2 / \sqrt{3}$$

$$T_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \sigma_3 / \sqrt{3}$$

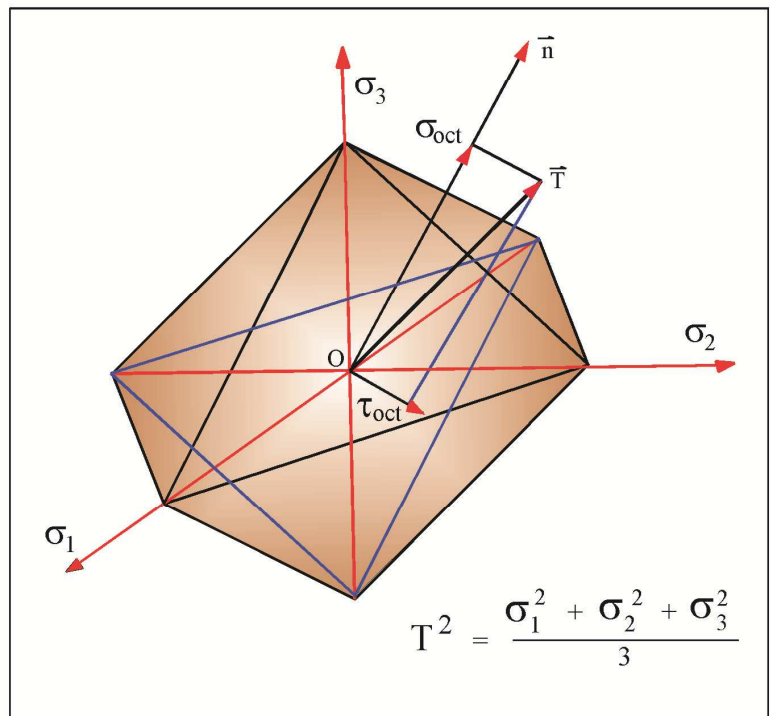


Figura C.7.

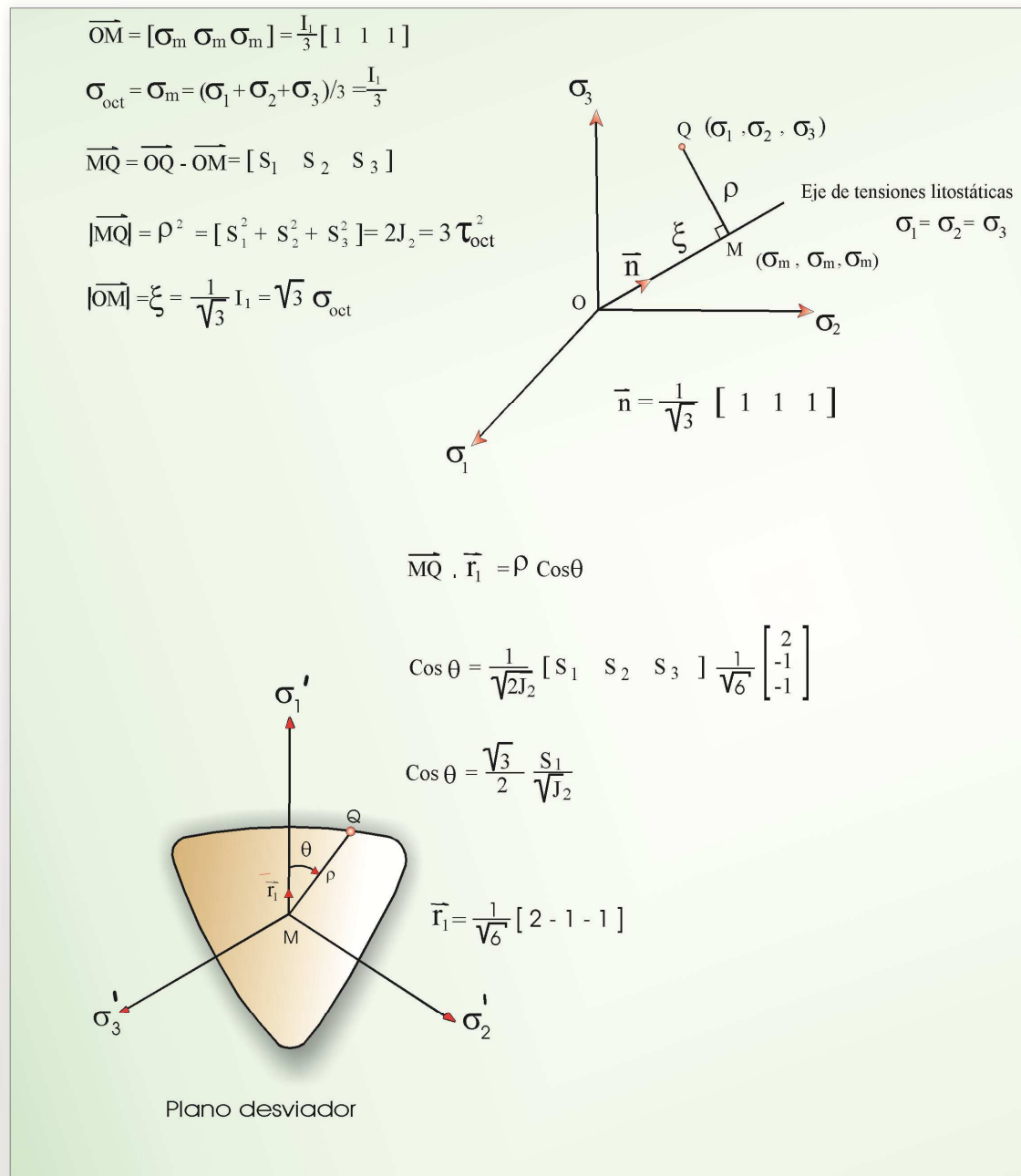


Figura C.8.

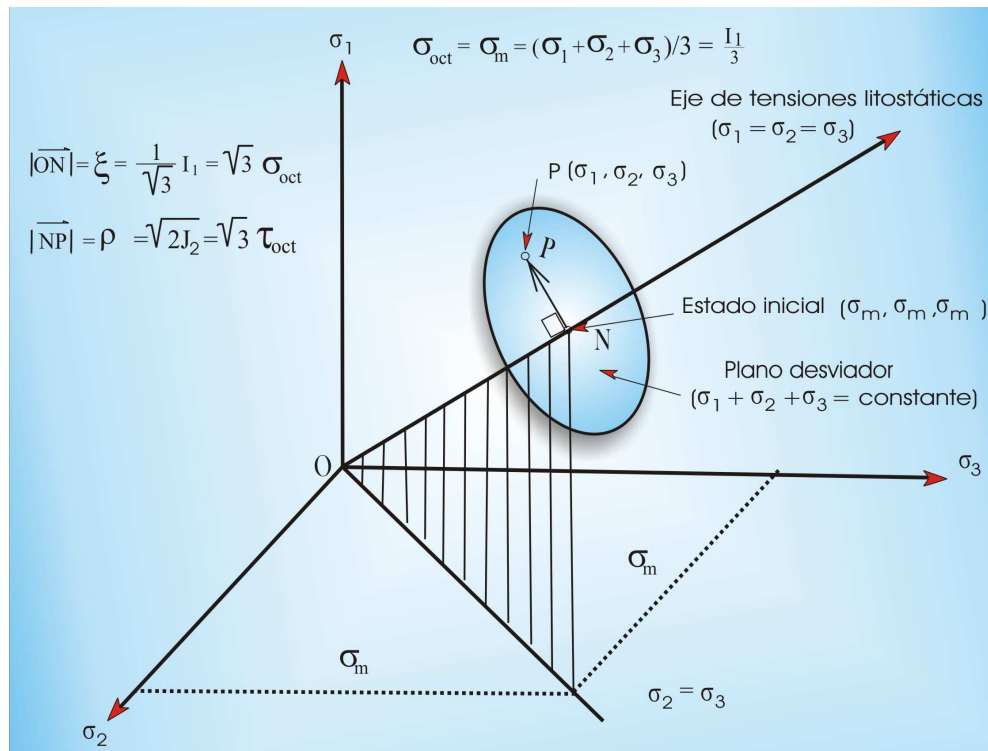


Figura C.9.

4. CRITERIOS DE ROTURA CONSIDERANDO EL ESFUERZO PRINCIPAL INTERMEDIO σ_2

Como es bien conocido existe mucha evidencia la cual indica que el esfuerzo principal intermedio σ_2 tiene influencia en la resistencia de la roca.

Diferentes investigadores como Mogi [32], Pan y Hudson [33], Brown [34], Lade [35], Wang y Kemeny [36], Chang y Haminson [37], Colmenares y Zoback [38], Chen y Saleeb [39], Chen [40] entre otros, han demostrado la importancia de considerar la rotura de la roca en tres dimensiones.

Teniendo en cuenta que el criterio de rotura de Hoek y Brown es ampliamente utilizado en el campo de la ingeniería de rocas, varios autores como Pan y Hudson [33] y Zhang [41] han incorporado el esfuerzo principal intermedio σ_2 en el referido criterio empírico de rotura.

- Pan y Hudson [33], han propuesto una expresión en tres dimensiones empleando el criterio original de Hoek y Brown [9], la cual está definida a través de la fórmula:

$$\frac{3}{\sigma_c} J_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} m \sqrt{J_2} - m \frac{I_1}{3} = s \cdot \sigma_c \quad (\text{C.135})$$

$I_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3$ = Primera invariante de esfuerzos efectivos del tensor σ_{ij} .

J_2 = Segunda invariante de esfuerzos del tensor desviador S_{ij} .

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right] \quad (\text{C.136})$$

- Zhang-Zhu [42] utilizando el criterio original de Hoek y Brown ha obtenido siguiente ecuación:

$$\frac{9}{2\sigma_c} \tau_{oct}^2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} m \cdot \tau_{oct} - m \cdot \sigma'_{m,2} = s \cdot \sigma_c \quad (\text{C.137})$$

Siendo,

$$\sigma'_{m,2} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \quad (\text{C.138})$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{\left[(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right]} \quad (\text{C.139})$$

Considerando las diferencias entre los criterios originales y generalizados de Hoek y Brown, dichos investigadores modificaron la ecuación (C.137), la cual se transforma como sigue:

$$\left(\frac{1}{(\sigma_c)^{\left(1-\frac{1}{a}\right)}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\tau_{oct}}{\sigma_c} \right)^{\frac{1}{a}} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right) - m \cdot \sigma'_{m,2} = s \cdot \sigma_c \quad (C.140)$$

Cuando $a=1/2$ esta última ecuación se transforma en (C.137)

• **Criterio de Lade modificado**

El criterio de Lade [43], fue originalmente desarrollado para materiales friccionantes sin cohesión, como suelos granulares, y se expresa a través de la ecuación:

$$\left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left(\frac{I_1}{P_a} \right)^{m'} = \eta_1 \quad (C.141)$$

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ = primera invariante de esfuerzos.

$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$ = tercera invariante de esfuerzos.

P_a = presión atmosférica.

m' y η_1 = constantes a determinar.

Posteriormente Ewy [44] en 1999, considero las presiones efectivas y la resistencia cohesiva, resultando:

$$\frac{(I_1')^3}{I_3'} = 27 + \eta \quad (C.142)$$

$$I_1' = (\sigma_1' + C / \tan \phi) + (\sigma_2' + C / \tan \phi) + (\sigma_3' + C / \tan \phi) \quad (C.143)$$

$$I_3' = (\sigma_1' + C / \tan \phi) \cdot (\sigma_2' + C / \tan \phi) \cdot (\sigma_3' + C / \tan \phi) \quad (C.144)$$

$$\eta = \frac{4(\tan \phi)^2 (9 - 7 \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} \quad (\text{C.145})$$

• Criterio propuesto por Zhou

Zhou [45] ha propuesto un criterio de rotura muy similar al desarrollado por Wiebols y Cook [46] y es referido como una modificación de los mencionados autores.

$$J_2^{1/2} = A + B \cdot \sigma_m + C \cdot \sigma_m^2 \quad (\text{C.146})$$

Siendo la tensión normal media efectiva,

$$\sigma_m = \frac{I_1'}{3} = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3} \quad (\text{C.147})$$

$$J_2^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + (\sigma_3' - \sigma_1')^2 \right]} \quad (\text{C.148})$$

J_2 =segunda invariante de esfuerzos del tensor desviador.

Por otra parte, las constantes se obtienen a través de las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\sqrt{27}}{2C_1 + (q-1)\sigma_3' - \sigma_c} \left(\frac{C_1 + (q-1)\sigma_3' - \sigma_c}{2C_1 + (2q+1)\sigma_3' - \sigma_c} - \left(\frac{q-1}{q+2} \right) \right) \\ q &= \tan^2(\pi/4 + \phi/2) \\ C_1 &= (1 + 0,6 \cdot \tan \phi) \cdot \sigma_c \\ B &= \frac{\sqrt{3}(q-1)}{q+2} - \frac{C}{3} [2\sigma_c + (q+2)\sigma_3'] \\ A &= \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_c}{3} B - \frac{\sigma_c^2}{9} C \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.149})$$

• Criterio de Mogi

Mogi [32] ha estudiado en detalle la rotura de rocas desde el año 1960, a través de innumerables experimentos los cuales se pueden apreciar en su excelente libro *Experimental Rock Mechanics*, que es el resultado de su labor como investigador y director en el Instituto de Investigaciones Sísmicas en la Universidad de Tokio.

Él ha dividido los criterios de rotura en dos grupos, en el primero no considera el efecto del esfuerzo principal intermedio σ_2 , como el criterio de Mohr-Coulomb, Hoek y Brown y el propuesto en esta investigación (capítulo 1, ecuación 34).

En el segundo grupo indica que existe una dependencia de σ_2 de acuerdo al ensayo triaxial verdadero o poliaxial $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$.

En base a lo previamente indicado, Mogi [32] a través de pruebas experimentales y mediante la modificación del criterio de rotura de von Mises considera:

Fractura: $\tau_{\text{oct}} = f_1(\sigma_1 + \sigma_3)$.

Fluencia (Yield): $\tau_{\text{oct}} = f_2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Siendo f_1 y f_2 funciones monótonas crecientes. Por otra parte, la interpretación física según Mogi [32] es la siguiente:

La fractura o fluencia de la roca ocurre cuando la energía de distorsión por unidad de volumen alcanza un valor crítico. Esta energía crítica no es constante, siendo monótona creciente con la tensión normal media efectiva. Al investigar la fractura, la superficie de falla por corte es aproximadamente paralela a σ_2 , y por lo tanto indica que la energía de distorsión se incrementa en función de $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, siendo el esfuerzo normal efectivo independiente de σ_2 .

Al analizar la fluencia menciona que no ocurre en un plano macroscópico de deslizamiento según una dirección definida, determinando a través de sus pruebas experimentales que la energía de distorsión es una función del esfuerzo normal medio $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.

Por otra parte, Chen y Saleeb [39], mencionan que, para el caso del ensayo de tracción, así como también a bajos esfuerzos de compresión, la falla en el hormigón se produce por fractura frágil, pero a grandes presiones de confinamiento se genera fluencia como en los materiales dúctiles.

Para el caso de fractura Mogi [32] recomienda una función potencial de la forma:

$$\tau_{\text{oct}} \approx A (\sigma_1 + \sigma_3)^n \quad (\text{C.150})$$

Los valores del exponente (n) obtenidos por Mogi [32] se muestran a continuación.

Sin embargo, al observar las gráficas obtenidas por el referido investigador a través de los diferentes ensayos en rocas, la ecuación anterior se puede aproximar a una recta, siendo también indicada por dicho investigador

Tabla C.14.

ROCA ENSAYADA	VALORES DE n
Caliza de Solnhofen	0,56
Dolomita de Duham	0,72
Mármol de Yamaguchi	0,74
Granito de Inada	0,87
Andesita de Manazuru	0,88
Granito de Westerley	0,89
Anfibolita de KTB	0,86

Al-Ajmi y Zimmerman [47] mencionan que la ecuación (C.150), es el aspecto relevante de la contribución de Mogi [32], y aun cuando la ecuación es usualmente considerada en forma potencial, estos investigadores han obtenido un ajuste lineal con coeficientes de determinación R^2 entre 0,933 y 0,999 empleando los mismos valores experimentales obtenidos por Mogi en la mayoría de las rocas previamente señaladas. Dichos resultados se indican en la Tabla C.15.

La relación lineal es:

$$\tau_{oct} = a + b \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \quad (C.151)$$

Los valores obtenidos de σ_c y $q = \tan^2(45 + \phi/2)$ se indican en la Tabla C.16:

Tabla C.15.

$\tau_{oct} = a + b [(\sigma_1 + \sigma_3)/2]$			
Roca ensayada	a (MPa)	b	R^2
Dolomita de Duham	58,32	0,55	0,99
Caliza de Solenhofen	103,95	0,35	0,983
Arenisca de Shirahama	32,95	0,39	0,933
Anfibolita de KTB	26,30	0,69	0,998
Mármol	9,80	0,58	0,999
Granito de Westerley	23,88	0,74	0,999

Tabla C.16.

ROCA ENSAYADA	σ_c (MPa)	$q = \tan^2(45 + \phi/2)$
Dolomita de Duham	298,93	3,66
Caliza de Solenhofen	351,50	2,16
Arenisca de Shirahama	123,59	2,31
Anfibolita de KTB	220,35	6,44
Mármol	54,02	4,15
Granito de Westerley	240,09	8,20

Teniendo en cuenta las tablas (C.15) y (C.16), a través de este estudio y con la ayuda de la hoja Excel y aplicando la técnica de los mínimos cuadrados se ha determinado el siguiente ajuste de curvas para calcular los parámetros a y b en función de σ_c y q respectivamente.

$$\left. \begin{aligned} a \text{ (MPa)} &= 10 \left(\frac{\sigma_c}{100} \right)^3 - 44 \left(\frac{\sigma_c}{100} \right)^2 + 61,25 \left(\frac{\sigma_c}{100} \right) \pm 7,77, R^2 = 0,95 \\ b &= 1,17 \left(\frac{q}{10} \right)^2 + 1,832 \left(\frac{q}{10} \right) + 0,017 \pm 0,0135, R^2 = 0,99 \end{aligned} \right\} \quad (C.152)$$

Se aprecia que el valor de 7,77 y 0,0135 corresponden al error estándar, es decir, a la desviación estándar de la distribución muestral del estimador.

Por otra parte, cabe destacar que en ciertos casos el plano de falla no es exactamente paralelo a σ_2 . Por lo tanto, en estas condiciones, Mogi [32] sugiere modificar la ecuación (C.150) en la forma:

$$\tau_{\text{oct}} = f(\sigma_1 + \sigma_3 + \alpha \cdot \sigma_2), \text{ siendo } (\alpha) \text{ una pequeña constante}$$

Mogi [32] también menciona en su libro que varios investigadores como Lode (1928) y Nadai (1950) proponen una relación del tipo $\tau_{\text{oct}} = f(\sigma_{\text{oct}})$ como criterio de rotura, existiendo varias fórmulas a través de la relación τ_{oct} y σ_{oct} como por ejemplo: $\tau_{\text{oct}} = C_1 \cdot \sigma_{\text{oct}} + C_2$, la cual fue aplicada para hormigón por Bresler y Pister (1957). Igualmente indica que la ecuación $\tau_{\text{oct}}^2 = C \cdot \sigma_{\text{oct}}$ ha sido analizada por Murrell (1965) como una extensión de la teoría de Griffith en tres dimensiones, así como la propuesta por los investigadores japoneses Sakurai y Serata (1967), la cual está representada por la función $\tau_{\text{oct}} = f(\sigma_{\text{oct}} \cdot \alpha + \beta \cdot \sigma_3 + \gamma)$, siendo α , β y γ constantes a determinar.

4.1. Otras formas de representar los diferentes criterios de rotura

Por lo general, es frecuente que los criterios de rotura se expresen como una función $f(\sigma_1, \sigma_3) = 0$, para el caso bidimensional, y al considerar tres dimensiones $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$.

Sin embargo, es común expresar también los criterios en términos de las invariantes y del ángulo (θ), el cual como previamente se ha indicado se conoce como ángulo de similitud o de Lode.

Chen y Saleeb [41] en el libro *Constitutive Equations for Engineering Materials*, exponen con gran claridad los diferentes criterios de rotura.

- Considerando el criterio de Tresca, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = k \quad (\text{C.153})$$

Denominada también frecuentemente como teoría de la tensión tangencial máxima.

Es decir, la rotura ocurre cuando el máximo esfuerzo cortante en un punto alcanza el valor crítico k . En el espacio de los esfuerzos principales representa un prisma cuya sección en el plano desviador es un hexágono regular.

Utilizando (C.134), la ecuación anterior se transforma en términos de la invariante J_2 y el ángulo θ , como sigue:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[\cos \theta - \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \right] = k \quad (\text{C.154})$$

Siendo, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

La ecuación anterior a través de simplificaciones trigonométricas se reduce,

$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - k = 0 \quad (\text{C.155})$$

En función de ρ, ξ, θ (véase Figura C.8) resulta,

$$f(\rho, \theta) = \rho \cdot \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{2} k = 0 \quad (\text{C.156})$$

• Criterio de von Mises

Este criterio establece que la falla ocurre cuando el esfuerzo cortante octaédrico τ_{oct} alcanza un valor límite. Matemáticamente puede expresarse a través de cualquiera de las tres fórmulas siguientes:

$$\left. \begin{aligned} f(J_2) &= J_2 - k^2 = 0 \\ f(\rho) &= \rho - k\sqrt{2} = 0 \\ f(\tau_{oct}) &= \tau_{oct} - k\sqrt{\frac{2}{3}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (C.157)$$

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ \text{Siendo } \sigma_1, \sigma_2 \text{ y } \sigma_3 \text{ las tensiones principales} \\ \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \\ \rho &= \sqrt{3} \tau_{oct} \end{aligned} \right\} \quad (C.158)$$

Es decir, cuando la segunda invariante del tensor de tensiones desviadoras J_2 es igual al cuadrado de una constante k propiedad del material.

Por lo tanto, dicho criterio en función de los esfuerzos principales está definido por la ecuación:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (C.159)$$

En el espacio de los esfuerzos principales, la superficie de rotura está representada por un cilindro cuya generatriz es paralela al eje litostático. La traza de la superficie en el plano desviador es un círculo que circunscribe el hexágono de Tresca (figura C.10).

Una peculiaridad común al estudiar la teoría de Tresca y la energía de distorsión de von Mises, es que ambos criterios son independientes de la primera invariante de tensiones I_1 , lo cual es una característica propia del comportamiento de los metales; y por lo tanto los diferencia de los materiales geológicos que si dependen de la componente esférica de la tensión ($I_1/3$). Cabe señalar que el comportamiento en rocas y suelos es más complicado y requiere de modelos con varios parámetros adicionales obtenidos a través de las pruebas de compresión uniaxial, corte y compresión triaxial. Se observa igualmente que al aplicar el criterio de Von

Mises, la tensión octaédrica τ_{oct} es constante y por ende la energía de distorsión.

Como lo indicado previamente Mogi [32] en los materiales geológicos y el hormigón la energía de distorsión es una función monótona creciente, en donde la tensión media $\sigma_m = \sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ tiene una influencia importante en la resistencia de la roca.

• Criterio de Mohr –Coulomb

Como se demostrará en el apéndice (D) de esta investigación, el criterio de Mohr-Coulomb en función de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 puede escribirse adimensionalmente a través de la ecuación:

$$\sigma_1 \left(\frac{1 - \sin \phi}{2 \cdot C \cdot \cos \phi} \right) - \sigma_3 \left(\frac{1 + \sin \phi}{2 \cdot C \cdot \cos \phi} \right) = 1 \quad (C.160)$$

Siento C la resistencia cohesiva y ϕ el ángulo de fricción interna.

Empleando la ecuación (C.134) junto con (C.160) en términos de la invariante I_1 , J_2 y θ , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cdot \cos \theta \right) (1 - \sin \phi) - \left(\frac{I_1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cdot \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) (1 + \sin \phi) = 2C \cdot \cos \phi \quad (C.161)$$

$$-\left(\frac{I_1}{3} \right) \sin \phi + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left[\cos \theta (1 - \sin \phi) - \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) (1 + \sin \phi) \right] - C \cdot \cos \phi = 0 \quad (C.162)$$

$$-\left(\frac{I_1}{3} \right) \sin \phi + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \left[\cos \theta - \cos \theta \cdot \sin \phi - \left(-\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) (1 + \sin \phi) \right] - C \cdot \cos \phi = 0 \quad (C.163)$$

Finalmente, mediante transformaciones trigonométricas se obtiene:

$$f(I_1, J_2, \theta) = -\frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \phi + \sqrt{J_2} \cdot \operatorname{sen}(\theta + \pi/3) - \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\theta + \pi/3) \cdot \operatorname{sen} \phi - C \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{C.164})$$

Que equivale a escribir,

$$f(I_1, J_2, \theta) = -I_1 \operatorname{sen} \phi + \left(\frac{3 \cdot (1 + \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \theta + \sqrt{3} \cdot (3 - \operatorname{sen} \phi) \cos \theta}{2} \right) \sqrt{J_2} - 3 \cdot C \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{C.165})$$

La cual también puede expresarse,

$$f(\xi, \rho, \theta) = -\sqrt{6} \cdot \xi \cdot \operatorname{sen} \phi + \left(\frac{3 \cdot (1 + \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \theta + \sqrt{3} \cdot (3 - \operatorname{sen} \phi) \cos \theta}{2} \right) \rho - 3\sqrt{2} \cdot C \cdot \cos \phi \quad (\text{C.166})$$

Siendo,

$$\xi = \sqrt{3} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \quad y \quad \rho = \sqrt{3} \tau_{oct} \quad (\text{C.167})$$

En el espacio de los esfuerzos principales el criterio de Mohr-Coulomb representa una pirámide hexagonal irregular, véase Fig. C.11.

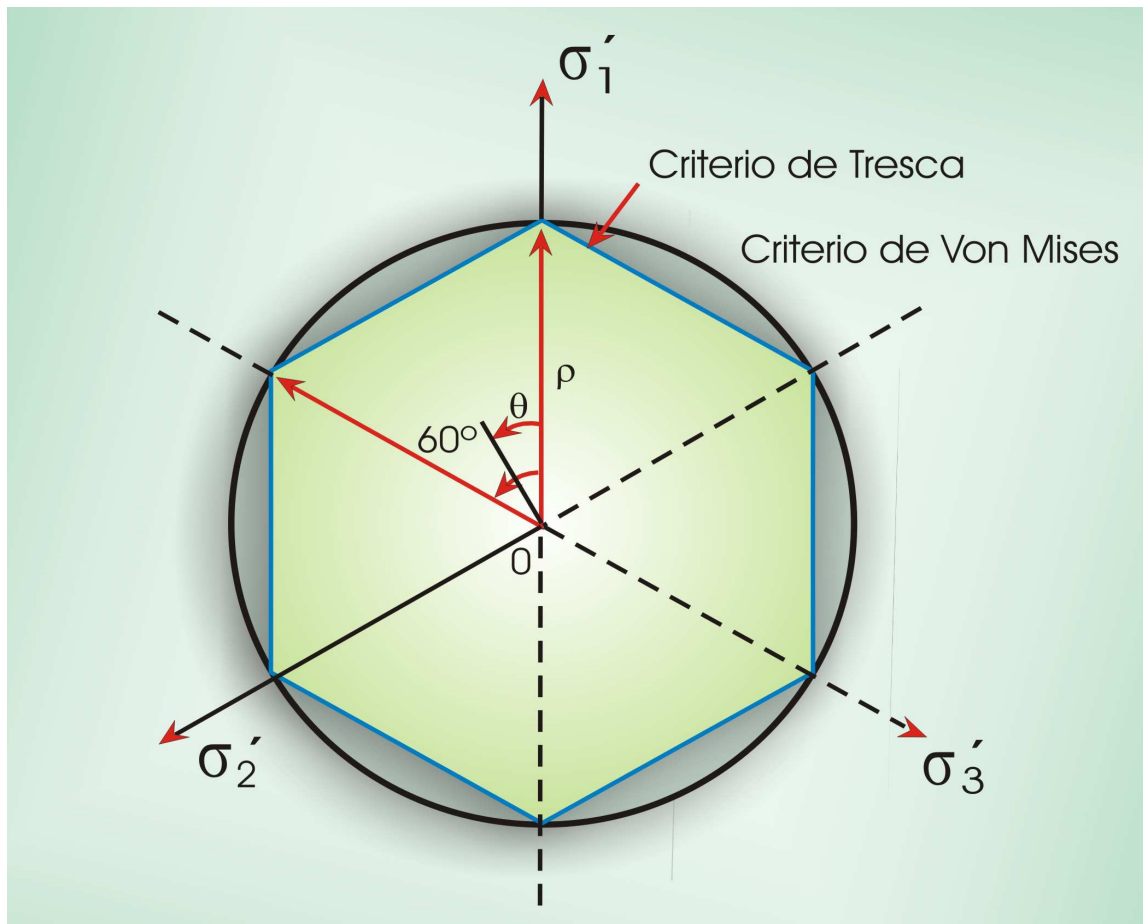


Figura C.10.

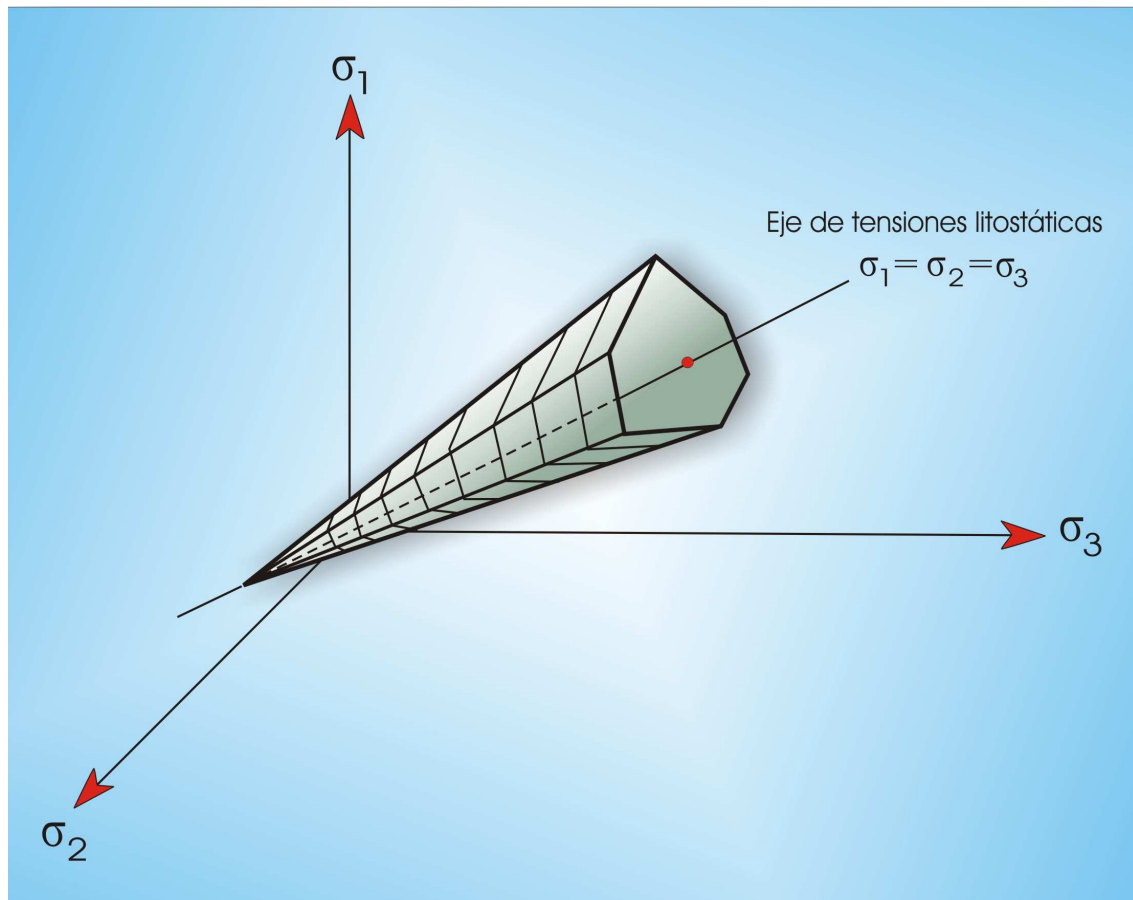


Figura C.11. Criterio de Mohr-Coulomb.

- **Criterio de Drucker –Prager**

Es una extensión del criterio de von Mises y es utilizado en ciertas aplicaciones prácticas en suelos.

Dicho criterio incluye la primera invariante I_1 y en general se representa mediante la ecuación:

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \alpha \cdot I_1 - k = 0 \quad (C.168)$$

La cual equivale a escribir, al considerar que: $\xi = I_1 / \sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{2J_2}$

$$f(\xi, \rho) = \rho - \sqrt{6} \cdot \alpha \cdot \xi - \sqrt{2} \cdot k = 0 \quad (\text{C.169})$$

La superficie de falla en el espacio de los esfuerzos principales es un cono y su traza en el plano desviador es un círculo. Véase Figs. C.12 y C.13.

De esta forma, dicho criterio puede ser observado como una superficie suave de Mohr –Coulomb.

El valor de las constantes en términos de C y ϕ para el caso que circunscribe el hexágono de Mohr–Coulomb. Corresponde al límite exterior y los parámetros se obtienen al coincidir ambos criterios en $\theta=0^\circ$ (ver punto A de la Figura C.13).

$$\alpha = \frac{2\text{sen}\phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \text{sen}\phi)}, k = \frac{6.C.\text{sen}\phi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \text{sen}\phi)} \quad (\text{C.170})$$

Si el círculo está inscrito en el hexágono $\theta=60^\circ$ (ver punto B de la Figura C.13), resulta:

$$\alpha = \frac{2\text{sen}\phi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \text{sen}\phi)}, k = \frac{6.C.\text{sen}\phi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \text{sen}\phi)} \quad (\text{C.171})$$

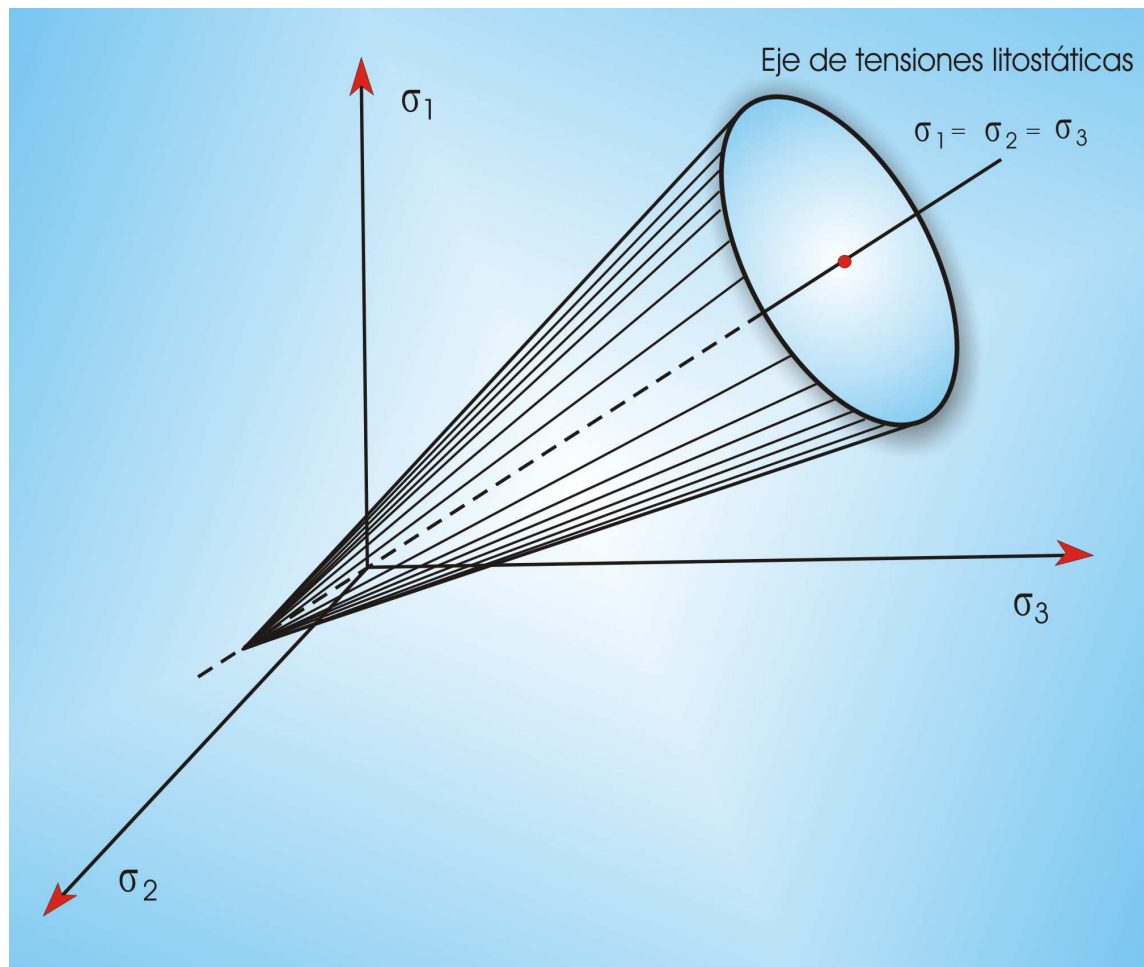


Figura C.12. Superficie de falla en el espacio de los esfuerzos principales correspondiente al criterio de Drucker –Prager.

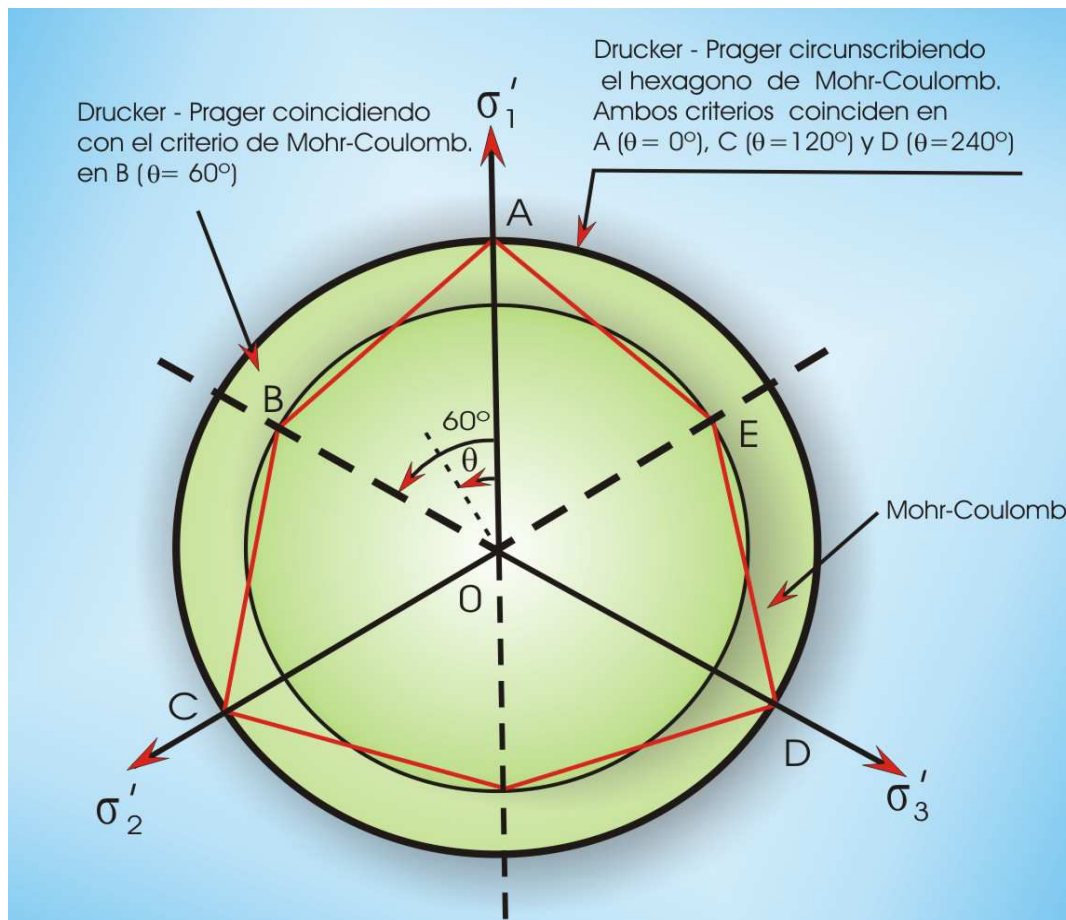


Figura C.13.

• Criterio Original de Hoek y Brown

Como previamente se ha mencionado, este criterio es muy utilizado en el campo de la ingeniería de rocas conjuntamente con el índice de resistencia geológica GSI y la resistencia a compresión simple de la roca intacta σ_c .

Por otra parte, con el objeto de expresar dicho criterio en función de las invariantes, es beneficioso expresar la ecuación C.3 en la forma siguiente:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^2 + \sigma_c^2 \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) \quad (C.172)$$

Reemplazando (C.134) en la ecuación anterior resulta:

$$\left[\frac{\left(\frac{I_1 + 2\sqrt{J_2}}{3} \cos \theta \right) - \left(\frac{I_1 + 2\sqrt{J_2}}{3} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right)}{\sigma_c} \right]^2 - \left(\frac{m}{\sigma_c} \right) \cdot \left[\left(\frac{I_1 + 2\sqrt{J_2}}{3} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] - s = 0 \quad (\text{C.173})$$

$$\left(\frac{4J_2}{\sigma_c^2} \right) \left[\frac{\left(\cos \theta + \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin \theta \sqrt{3}}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right]^2 - \left(\frac{m}{\sigma_c} \right) \cdot \left[\left(\frac{I_1 + 2\sqrt{J_2}}{3} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] - s = 0 \quad (\text{C.174})$$

Obteniéndose finalmente,

$$\left(\frac{4J_2}{\sigma_c^2} \right) \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{m}{\sigma_c} \right) \cdot \left[\left(\frac{I_1 + 2\sqrt{J_2}}{3} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] - s = 0 \quad (\text{C.175})$$

5. AVANCES EN LAS TEORÍAS DE RESISTENCIAS DE MATERIALES CONSIDERANDO DIFERENTES ESTADOS DE TENSIONES

Como lo menciona Yu [48], en los últimos 100 años desde que la bien conocida teoría de Mohr-Coulomb fue establecida en el año 1900, una considerable cantidad de investigación teórica y experimental se ha llevado a cabo para determinar la resistencia de materiales sometidos a diferentes estados de esfuerzos.

Mohr usando su círculo de esfuerzos, el cual lleva su nombre desarrolló su teoría de resistencia, la cual es muy utilizada para determinar la resistencia de los suelos en función de las presiones efectivas.

Cabe destacar que, a sus treinta y dos años, al ser reconocido como un destacado ingeniero, fue invitado como profesor en la Universidad de Stuttgart, donde a través de sus clases magistrales de ingeniería mecánica, sembró la semilla y el interés en sus estudiantes, logrando que algunos de

ellos se destacaran como investigadores en el campo de la resistencia de materiales.

Sin embargo, es oportuno señalar que Parry [26], en la nota histórica de su libro "Mohr Circles, Stress Paths and Geotechnics", indica que, si bien el círculo de esfuerzos es atribuido a Mohr, fue el ingeniero estructural Karl Kulmann el pionero en representar gráficamente los esfuerzos, además de su aporte a la teoría de estructuras de puentes, diseño de armaduras, junto con su libro de estática gráfica, el cálculo de presiones sobre muros y obras subterráneas. Sin lugar a dudas sus investigaciones contribuyeron en forma relevante en el desarrollo de la ingeniería para su época.

Por otro lado, Mohr se destacó por sus estudios de las tensiones en dos y tres dimensiones, en el desarrollo de su criterio de rotura aplicando el círculo de esfuerzos, conocido como representación o diagrama de Mohr.

Esta representación plana de los esfuerzos se extendió rápidamente, facilitando los cálculos ya que el elipsoide de tensiones de Lamé, permite obtener un análisis o interpretación de los esfuerzos, el cual no es muy práctico por extenderse en tres dimensiones.

Yu [48], autor del excelente libro "Unified Strength Theory and Its Applications", y sus artículos "Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century", [49] y "A unified strength criterion for rock", Yu et al [50] divide su investigación en tres grupos de teorías de resistencia. En sus estudios considera las tensiones cortantes principales y los esfuerzos normales actuando sobre los planos donde se generan las referidas tensiones cortantes.

Las tensiones tangenciales y normales están representadas por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j) \\ i, j &= 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j) \end{aligned} \right\} \quad (C.176)$$

En forma sucinta, utilizando la nomenclatura de Yu [58, 49]¹³, y Yu et al [50] se indican algunos de los criterios más importantes descritos por el referido investigador.

5.1. Teoría Cortante Simple o Criterio de Límite Inferior (Single Strength Theory – SSS – Lower Bound Criterion)

1) En el caso del criterio de rotura de Mohr-Coulomb, Yu [48, 49, 50] lo expresa como sigue:

$$F = (\tau_{13} + \beta \cdot \sigma_{13}) = C \quad (C.177)$$

Que equivale a escribir,

$$F = \sigma_1 - \alpha \cdot \sigma_3 = \sigma_t \quad (C.178)$$

σ_c y σ_t corresponden a la resistencia a compresión sin confinar y a tracción respectivamente, siendo $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$.

2) Criterio de Tresca

$$f = \tau_{13} = C \quad (C.179)$$

5.2. Teoría de la Resistencia Cortante Octaédrica, o Criterio de Curvas Intermedias (Octahedral Shear Strength Theory – OSS Theory – Intermediate Curves Criteria) – Yu [48, 50]

Matemáticamente puede escribirse según el mencionado autor como sigue:

$$F(\tau_8, \sigma_8) = C \quad \therefore \quad \tau_8 = f(\sigma_8) \quad (C.180)$$

¹³Dicho autor al igual que en la teoría de la elasticidad establece que los esfuerzos de tracción son positivos. Por ejemplo, en el criterio de Mohr Coulomb: $\sigma_1 - \alpha \cdot \sigma_3 = \sigma_t$

Se observa que al considerar $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_t$. Cuando $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_c$ (compresión es negativo) Como se sabe en mecánica de rocas y de suelos se utiliza la notación en la cual las tensiones de compresión son positivas. La razón se debe a que la mayoría de las tensiones actuando en la corteza terrestre son compresionales.

$$\tau_8 = \tau_{oct} \quad , \quad \sigma_8 = \sigma_{oct} \quad (C.181)$$

Siendo,

$$\tau_8 = \tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \quad (C.182)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (C.183)$$

$$\sigma_8 = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (C.184)$$

3) Criterio de von Mises (un parámetro),

$$f = \tau_8 = C, \text{ es decir } J_2 = C \quad (C.185)$$

C = parámetro a determinar.

4) Drucker-Prager (dos parámetros),

$$F = \tau_8 + \beta \cdot \sigma_8 = C \quad (C.186)$$

β y C = parámetros a determinar

6.2.1 Teoría de la resistencia cortante octaédrica con múltiples parámetros,

$$F = A \tau_8^2 + B \sigma_8^2 + C \sigma_8 - 1 = 0 \quad (C.187)$$

También esta última ecuación puede expresarse en la forma,

$$F = A \tau_8 + b \sigma_8 + a \sigma_8^2 = C \quad (C.188)$$

5.3. Teoría de Resistencia al Corte Doble, o Criterio de límite Superior (Twin-Shear Strength Theory – TSS - Upper Bound Criterion)

Estas teorías de resistencia, consideran la tensión cortante máxima τ_{13} , los esfuerzos cortantes principales intermedios τ_{12} o τ_{23} y la influencia de los esfuerzos normales σ_{13} y σ_{12} o σ_{23} . Matemáticamente se expresa como sigue:

$$F[\tau_{13}, \tau_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{12}] = C \quad (C.189)$$

Yu [48], ha propuesto el siguiente criterio considerando dos parámetros.

$$F = \tau_{13} + \tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{12}) = C \quad (C.190)$$

Cuando,

$$\tau_{12} + \beta \cdot \sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta \cdot \sigma_{23} \quad (C.191)$$

Por otra parte,

$$F = \tau_{13} + \tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{23}) = C \quad (C.192)$$

Cuando,

$$\tau_{12} + \beta \cdot \sigma_{12} \leq \tau_{23} + \beta \cdot \sigma_{23} \quad (C.193)$$

En función de las tres tensiones principales las referidas ecuaciones pueden expresarse como sigue:

$$\sigma_1 - \frac{\alpha}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad (C.194)$$

Cuando,

$$\sigma_2 \leq \left(\frac{\sigma_1 + \alpha \cdot \sigma_3}{1 + \alpha} \right) \quad (C.195)$$

A través de la expresión, también las tres tensiones principales pueden expresarse:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha \cdot \sigma_3 = \sigma_t \quad (\text{C.196})$$

Cuando,

$$\sigma_2 \geq \left(\frac{\sigma_1 + \alpha \sigma_3}{1 + \alpha} \right) \quad (\text{C.197})$$

5.4. Teoría de la Resistencia Unificada de Yu

La teoría de resistencia unificada propuesta por Yu [48, 49, 50], presenta las siguientes características:

- a) Tiene la habilidad de reflejar el comportamiento de la roca para diferentes resistencias a tracción, compresión, presión litostática, y el efecto del esfuerzo principal intermedio.
- b) Representa un modelo matemáticamente simple y unificado.
- c) Es fácil de aplicar en modelos analíticos y numéricos. Igualmente es aplicable en el campo de la plasticidad y puede expresarse en términos de la invariante de esfuerzos.

El modelo matemático puede expresarse como sigue:

$$F = \tau_{13} + b \cdot \tau_{12} + \beta (\sigma_{13} + b \cdot \sigma_{12}) = C \quad (\text{C.198})$$

Las magnitudes de β y C se determinan experimentalmente a través de los ensayos de compresión sin confinar y de tracción.

Cuando se cumple que:

$$\tau_{12} + \beta \cdot \sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta \cdot \sigma_{23} \quad (\text{C.199})$$

Adicionalmente, si:

$$F' = \tau_{13} + b \cdot \tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + b \cdot \sigma_{23}) = C \quad (C.200)$$

A la vez, debe satisfacer la condición,

$$\tau_{12} + \beta \cdot \sigma_{12} \leq \tau_{23} + \beta \cdot \sigma_{23} \quad (C.201)$$

En función de los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 , resultan las siguientes ecuaciones lineales:

$$\sigma_1 - \frac{\alpha}{(1+b)}(b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad (C.202)$$

$$\text{Debiéndose cumplir que: } \sigma_2 \leq \left(\frac{\sigma_1 + \alpha \cdot \sigma_3}{1 + \alpha} \right) \quad (C.203)$$

Adicionalmente,

$$\frac{\alpha}{(1+b)}(\sigma_1 + b \cdot \sigma_2) - \alpha \cdot \sigma_3 = \sigma_t \quad (C.204)$$

Debiendo satisfacer (C.197).

La teoría de resistencia unificada, se reduce a la teoría cortante simple, por ejemplo, en el caso de Mohr-Coulomb cuando $b = 0$, y al criterio cortante doble cuando $b = 1$. En general, se obtiene un amplio rango para valores definidos en el intervalo $0 \leq b \leq 1$, siendo además versátil en reflejar el efecto del esfuerzo principal intermedio σ_2 para diferentes materiales.

De acuerdo a Yu et al [50] en la mayoría de las rocas el parámetro (b) se encuentra entre 0,5 y 1. A la vez, recomiendan emplear el criterio unificado con $b = 0,5$, reemplazando el criterio de Mohr-Coulomb (Teoría Cortante Simple) y el criterio extendido de von Mises.

Por lo tanto, al considerar $b=0,5$ las ecuaciones (C.202) y (C.203) se transforman:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sigma_1 - \frac{\alpha}{3}(\sigma_2 + 2\sigma_3) = \sigma_t, \text{ cuando } \sigma_2 \leq \left(\frac{\sigma_1 + \alpha \cdot \sigma_3}{1 + \alpha} \right) \\ F' &= \frac{1}{3}(2\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, \text{ cuando } \sigma_2 \geq \left(\frac{\sigma_1 + \alpha \cdot \sigma_3}{1 + \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.205})$$

Según el referido investigador, el parámetro (b) puede inicialmente ser obtenido en función de la resistencia a tracción σ_t , junto con $\alpha = (\sigma_t/\sigma_c)$ y de la resistencia al corte τ_0 de la roca.

A la vez (b) está relacionado con el esfuerzo principal intermedio σ_2 .

$$b = \frac{(1 + \alpha)\tau_0 - \sigma_t}{(\sigma_t - \tau_0)} \quad (\text{C.206})$$

5.4.1. Breve discusión de los criterios no lineales según Yu et al [50]

Yu y sus colaboradores dividen en tres grupos los criterios no lineales de rotura en rocas.

- El esfuerzo principal mayor σ_1 es función del esfuerzo principal menor σ_3 .

Murrell, 1965

$$\sigma_1 = \sigma_c + a \cdot \sigma_3^b \quad (\text{C.207})$$

Bieniawski, 1974, Yudhbir, 1983

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = 1 + b \cdot \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^\alpha \quad (\text{C.208})$$

Adicionalmente, Úcar [5] determinó la envolvente de rotura considerando la relación indicada en (C.208), para el caso particular que $\alpha = 0,75$, valor recomendado por Bieniawski [7]. En el apéndice (D) se determina analíticamente la referida curva de resistencia intrínseca.

Balmer, 1952, Sheorey et al, 1989:

$$\sigma_1 = \sigma_c \cdot \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_t} \right)^b \quad (\text{C.209})$$

Mogi:

$$\sigma_1 = a + b \cdot c \sigma_3 \quad (\text{C.210})$$

- En el segunda agrupación el esfuerzo cortante principal $\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ es una función del esfuerzo principal menor σ_3 .

Hobbs, 1964:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_c + a \cdot \sigma_3^b \quad (\text{C.211})$$

Ramamurthy et al, 1985:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_c + a \cdot \sigma_3 \cdot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right)^b \quad (\text{C.212})$$

Hoek y Brown, 1980:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_c \left[m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right]^{1/2} \quad (\text{C.213})$$

Yoshida, 1990:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = a \cdot \sigma_c \left[\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right]^b \quad (\text{C.214})$$

Finalmente en el tercer grupo el esfuerzo cortante principal $\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ es una función de la tensión normal $\sigma_{13} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$.

Franklin, 1971:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = a(\sigma_1 + \sigma_3)^b \quad (C.215)$$

Fairhurst, 1964:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = a + b(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (C.216)$$

En las ecuaciones indicadas en esta sección a , b , c , α , m y s , corresponden a parámetros de la roca determinados mediante ajuste de la curva a través de ensayos de compresión, tracción y triaxiales.

Otro grupo de rotura como una extensión o ramificación de Mohr- Coulomb, es la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{13} + \beta \cdot \sigma_{13} + f(\sigma_m) &= C \\ \sigma_1 + \alpha \cdot \sigma_3 + a \cdot \sigma_m + b \cdot \sigma_m^2 &= C \\ \sigma_m &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \end{aligned} \right\} \quad (C.217)$$

a , b , C , α son constantes del material.

Criterio de Rotura No Lineal Unificado de acuerdo a Yu et al [50]:

El criterio de rotura no lineal unificado propuesto por Yu y sus colaboradores puede expresarse como sigue:

$$F = f[\tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{13}(\tau_{23}), \sigma_{13}, \sigma_{12}(\sigma_{23}), \sigma_m] \quad (C.218)$$

Siendo el criterio de rotura,

$$\left[\sigma_1 - \frac{1}{(1+b)} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 - \frac{m \sigma_c}{(1+b)} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) - s \cdot \sigma_c^2 = 0 \quad (\text{C.219})$$

En forma adimensional la ecuación anterior se transforma:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{(1+b)} \left(b \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + \sqrt{\frac{m}{(1+b)} \left(b \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) + s} \quad (\text{C.220})$$

σ_c , es la resistencia de la roca intacta a compresión simple.

m y s son parámetros del criterio de rotura de Hoek y Brown previamente definidos. Por otra parte, el valor de α de acuerdo a la ecuación (C.6) es:

$$\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -\frac{1}{2} \left[m - (m^2 + 4 \cdot s)^{1/2} \right] \quad (\text{C.221})$$

Los valores de m y s se determinan a través de las tablas (C.5) y (C.6), y empleando la ecuación (C.17).

Al considerar el criterio de resistencia al corte doble (Twin -Shear Strength Theory-TSS), con el parámetro $b=1$, resulta:

$$\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) - \sqrt{m \cdot \sigma_c (\sigma_3 + \sigma_2) / 2 + s \sigma_c^2} = 0 \quad (\text{C.222})$$

En forma más general, el criterio de resistencia unificado para el caso no lineal según Yu y sus colaboradores está representado por la ecuación:

$$\left[\sigma_1 - \frac{1}{(1+b)} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) \right] - \sigma_c \left[\frac{m}{(1+b) \sigma_c} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) + s \right]^n = 0 \quad (\text{C.223})$$

Teniendo en cuenta que el ángulo de similitud o de Lode es:

$$\theta = \arctan \left[\frac{\sqrt{3} \tau_{23}}{\tau_{13} + \tau_{12}} \right] = \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3 \sqrt{3}}{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3} \right], \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ \quad (\text{C.224})$$

Al utilizar (C.134), el criterio unificado indicado a través de la ecuación (C.223) en función de las invariantes I_1 y J_2 , puede expresarse como sigue:

$$F = \frac{4}{(1+b)^2} \left[\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - b \cdot \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right]^2 \cdot J_2 - \frac{2m \cdot \sigma_c}{\sqrt{3}(1+b)} \left[b \cdot \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \cdot \sqrt{J_2} - \frac{m \cdot \sigma_c}{3} I_1 - s \sigma_c^2 = 0 \quad (\text{C.225})$$

Si en la ecuación (C.225) se particulariza para $b=0$, es decir, no se tiene en cuenta el esfuerzo principal intermedio σ_2 , se obtiene el criterio empírico original de Hoek Brown.

$$F = \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cdot J_2 - \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sigma_c}{6} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \sqrt{J_2} - \frac{m \cdot \sigma_c}{12} I_1 - \frac{s \sigma_c^2}{4} = 0 \quad (\text{C.226})$$

Cabe destacar que la ecuación (C.226) es exactamente igual a la ecuación (C.175) previamente obtenida al utilizar en criterio de Hoek y Brown.

5.5. Criterio propuesto por Úcar [51] en función de las invariantes

En esta última sección se emplea el criterio de rotura desarrollado por Úcar [51], cuyo procedimiento analítico y aplicación se explica en forma detallada en el capítulo 1 (sección 1.3).

A continuación, se expresa el referido criterio en función de las invariantes utilizando las coordenadas del espacio Haigh –Westergaard (ξ , ρ , θ).

Por tanto, a través de la ecuación (C134) y (34) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_1}{3\sigma_c} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{\sigma_c} \right) \cos \theta = k_1 \left[\frac{I_1}{3\sigma_c} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{\sigma_c} \right) \cos(\theta + 120^\circ) - \xi \right] + \\ + k_2 \sqrt{ \frac{I_1}{3\sigma_c} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\rho}{\sigma_c} \right) \cos(\theta + 120^\circ) - \xi } \end{aligned} \quad (C.227)$$

Siendo,

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{3} \cdot \sigma_{oct} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{I_1}{3} \right) \\ \rho &= \sqrt{3} \cdot \tau_{oct} = \sqrt{2J_2} \\ \theta &= \arctan \left[\sqrt{3} \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3} \right) \right] \Rightarrow \text{ángulo de Lode} \end{aligned}$$

En el apéndice (G) el cual concierne con la **Representación Gráfica de los Esfuerzos** se podrá apreciar mediante ejemplos prácticos la importancia y por tanto, las ventajas de utilizar el espacio de las tensiones principales y las coordenadas Haigh -Westergaard en el plano desviador aplicando diferentes criterios de rotura.

6. REFERENCIAS

1. BIENIAWSKI, T (1989).: "Engineering rock mechanics classifications". John Wiley & Sons, 251p.
2. BARTON, N (2002).: "Some New Q-value correlations to assist in site characterization and tunnel design". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 39, No2, pp185-216.
3. HOEK, E Y BROWN, T, (1989).: "The Hoek-Brown failure criterion - a 1988 updated in Rock engineering for undergrounds excavations". Proceedings of the 15th Canadian Rock Mechanics Symposium (ed.J.C. Curran), 31-38. Toronto: Dept.Civil. Engineering, University of Toronto.

4. EDELBRO, C (2003).: "Rock Mass Strength - A Review". Technical Report 2003:16, Lulea University of Technology, Department of Civil and Mining Engineering- Division of Rock Mechanics, 92p.
5. UCAR, R (2003).: "Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos". Ingeniería del Terreno, Volumen 3, E.T.S.I Minas, Universidad Politécnica de Madrid, Editor Carlos López J, Madrid, pp 99-117.
6. MURRELL, S.A. (1965).:"The effect of triaxial stress system on the strength of rocks at atmospheric temperatures". Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society, Volume 10, pp231-281.
7. BIENIAWSKI, Z.T., (1974).: "Estimating the strength of rock materials". Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 74, number 8, pp 312-320.
8. WANG,CHUAN-ZHI,GUO,ZHEN-HAYyZHANG,XIU-QIN(1987).: "Experimental investigation of biaxial and triaxial Compressive concrete strength". ACI Materials Journal, Title No 84-M11, pp92-100.
9. HOEK, E. y BROWN T.: "Empirical strength criterion for rock masses". Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 106, No. GT9, Sept., 1980, pp 1013-1035.
10. HOEK, E, CARRANZA-TORRES, C y CORKUM, B, (2002).: "Hoek-Brown failure criterion -2002 edition". Proceedings of the 5th North American Rock Mechanics Symposium and 17th Tunnelling Association of Canada Conference: NARMS-TAC 2002, July 7-10, University of Toronto, 267-271.
11. TORRES, R (1992).: "Nuevos criterios sobre la resistencia del concreto". Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, 160p, más anexos.
12. GONZÁLEZ DE VALLEJO, L, FERRER, M, ORTUÑO, L y OTEO, C, (2002).: "Ingeniería Geológica". Prentice Hall, 715 p.
13. UCAR, R., (1986).: "Determination of shear failure envelope in rock masses". Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 112, No. 3, March, pp 303-315.

14. UCAR, R (1986).: "Determinación de la envolvente de falla por cizallamiento en macizos rocosos aplicando el criterio de Hoek y Brown". Ciencia e Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Vol. XVIII, N°1, PP. 83-98.
15. HOEK, E y BROWN, E.T (1988).: "The Hoek –Brown failure criterion –a 1988 update". Proceedings of the 15th Canadian Rock Mechanics Symposium, University of Toronto, pp31-38.
16. HOEK, E, KAISER, P.K y BAWDEN, W.F (1995).: "Support of underground excavation in hard rock". A. A Balkema, 215p.
17. SÖNMEZ, H y ULUSAY, R (2002).: "A discussion on the Hoek-Brown failure criterion and suggested modifications to the criterion verified by slope stability studies". Bulletin of Earth Science Application and Research Centre of University Hacettepe, Vol 26, pp77-99.
18. HOEK, E y BROWN, T (1997).: "Practical estimates of rock mass strength". Int. J. Rock.Mech. Min Sci. Vol 34, No 8, pp1165-1186.
19. <http://www.rocksience.com/assets/files/uploads/8079.pdf> Rock Mass Strength Analysis using the Generalized Hoek Brown failure criterion.
20. MARINOS, P and HOEK, E. (2000).: "GSI – A geologically friendly tool for rock mass strength estimation". Proc. Geo Eng2000 Conference, Melbourne. 1422-1442.
21. KALAMARAS, G.S y BIENIAWSKI, Z.T (1995).: "A rock strength concept for coal seams incorporating the effect of time". Proceedings of the Eighth International Congress of Rock Mechanics, Vol.1, pp 295-302.
22. KUMAR, P. (1998).: "Shear failure envelope of Hoek-Brown criterion for rock mass". Tunnelling and Underground Space Technology, Volume 13, number 4 ,pp 453-458.
23. BARTON, N. y CHOUBEY, V. (1976).: "The shear strength of rock joints in theory and practice". Rock Mechanics 10, pp1-54, Springer –Verlag.

24. JOHNSTON, I.W y CHIU, H.K. (1984).: "Strength of weathered Melbourne mudstone". ASCE.J.Geotech. Engg. 110(GT7), pp730-898.
25. JOHNSTON, I.W (1985).: "Strength of intact geomechanical materials". ASCE. J.Geotech. Engg. 111(GT6), pp730-749.
26. PARRY, R.H. (1995).: "Mohr Circles, Stress Paths and Geotechnics". E& FN Spon, 230p.
27. RAMAMURTHY, T (1986).: "Stability of rock mass". Indian Geotechnical Journal, Vol 16, No1, 74p.
28. SHOREY, P (1997).: "Empirical rock Failure Criteria". A.A. Balkema, 176p.
29. BARTON, N. (1976).: "The shear strength of rock and rock joints". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts, Rock Mechanics Review, pp 255-279.
30. HOEK, E y BRAY, J.W (1981).: "Rock Slope Engineering". Institution of Mining and Metallurgy, Revised Third Edition, London, 358p.
31. DREYER, W (1972).: "The Science of Rock Mechanics". Part 1, The Strength Properties of Rocks, Trans Tech Publications, 501.
32. MOGI, K (2007).: "Experimental rock mechanics". Taylor & Francis, 361p.
33. PAN, X.D y HUDSON, J.A (1988).: "A simplified three dimensional Hoek and Brown yield criterion". In: Romana, M (Ed) Rock Mechanics and Power Plants, Balkema, Rotterdam, pp 95-103.
34. BROWN, E.T (1993).: "The nature and fundamentals of rock engineering". Comprehensive Rock Engineering -Principle, Practice and Projects. Editor. J.S Hudson, Pergamon Press1, 1-23.
35. LADE, P.V (1993).: "Rock strength criteria: The theories and the evidence". In: Hudson J.A (Ed), Comprehensive Rock Engineering – Principle, Practice and Projects, Vol 1, Pergamon Oxford, pp255-284.

36. WANG, R y KEMENY, J.M (1995).: "A new empirical criterion for rock under polyaxial compressive stresses". In: Daemenand and Shultz(ed) Rock Mechanics. Balkema, Rotterdam, pp453-458.
37. CHANG, C y , B.C. (2000).: "True triaxial strength and deformability of the German Continental deep drilling program (KTB) deep hole amphibolite". J Geohys.Res.105:8999-9013.
38. COLMENARES, L.B., y ZOBACK, M.D. (2002).: "A statical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks". Int. J. Rock. Mech. Min. Sci 39(6), pp695-729.
39. CHEN, W.F, y SALEEB, A.F. (1982).: "Constitutive equations for engineering materials". Vol.1, John Wiley & Sons, 580p.
40. CHEN, W. F., (1982).: "Plasticity in reinforced concrete". McGraw-Hill Book company, 474p.
41. ZHANG, L (2008).: "A generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion". Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol.41, No 6, pp893-915.
42. ZHANG, L y ZHU, H (2007).: "Three-dimensional Hoek-Brown strength criterion for rocks". Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering ASCE, 133(9), pp1128-1135.
43. LADE, P (1977).: "Elasto-Plasto stress-strain theory for cohesionless with curved yield surfaces". International Journal of Solids and Structures, 13, pp1019-1035.
44. EWY, R. (1999).: "Wellbore-stability predictions by use of a modified Lade criterion". SPE Drilling & Completion, Vol 14(2), pp85-91.
45. ZHOU, S (1994).: "A program model initial shape and extent of borehole breakout". Computers and Geosciences, 20, 7/8, pp1143-1160.
46. WIEBOLS, G.A y COOK, N.G (1968).: "An energy criterion for strength of rock in polyaxial compression". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 5, pp529-549.

-
47. AL-AJMI, A.M y ZIMMERMAN, R.W (2005).: "Relation between the Mogi and the Coulomb failure criteria". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 42, pp431-439.
 48. YU, MH (2003).: "Unified strength theory and its applications". Springer, 412p.
 49. YU, MH (2002).: "Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20 Century". Applied Mechanics Reviews, vol 55, N°3, pp169-218.
 50. YU, MH, ZAN, YW, ZHAO, J y YOSHIMINI, M (2002).: "A unified strength criterion for rock material". International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 39, pp 975-989.
 51. ÚCAR, R., (2011).: "Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos". Proceedings of PanAm CGS Geotechnical Conference, Volumen 3, pp 2694-2700, Toronto, Canadá.

APÉNDICE D DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE EN MACIZOS ROCOSOS APLICANDO EL CRITERIO DE MURRELL – BIENIAWSKI¹

El autor dedica con admiración y cariño el presente artículo al profesor Dr. Eduardo Peláez como reconocimiento a su extraordinaria labor docente y humana, la cual llevó a cabo con notable dedicación en la formación de profesionales de la ingeniería en nuestra querida y recordada Escuela de Geología y Minas de la Universidad Central de Venezuela.

RESUMEN

En el presente trabajo se ha desarrollado una expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos al utilizar el criterio empírico de rotura desarrollado por Murrell[1]y expresado posteriormente en forma adimensional por Bieniawski [2], en el cual los esfuerzos principales en el instante de la falla están vinculados a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1$$

¹Artículo publicado por el autor del presente texto en Ingeniería del Terreno, Ingeoter volumen 2, pp 99-118, Editor Carlos López Jimeno, Madrid, 2003

Siendo σ_c la resistencia a compresión simple de la roca intacta y los parámetros A y K , constantes que dependen de las propiedades geomecánicas de la roca.

En estas condiciones, al aplicar esta nueva hipótesis, conjuntamente con los conceptos matemáticos básicos sobre contactos de curvas para obtener la envolvente de una familia de círculos de falla, se ha determinado la resistencia al corte de la roca al considerar que $\tau_\alpha = \xi(\sigma_\alpha, \sigma_c, K, A)$, en donde $\sigma_\alpha = \sigma_n$ es el esfuerzo normal actuando sobre el plano de rotura.

Una expresión de este tipo ayudará sin lugar a dudas a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a la estabilidad de taludes y obras subterráneas, en el diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, en la estimación de la resistencia por el fuste en roca de calidad pobre siendo el tipo de cimentación por medio de pilotes, así como la carga de hundimiento de una cimentación en terrenos diaclasados, y otras innumerables aplicaciones dentro del campo de la geotecnia.

I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años un gran esfuerzo se ha realizado en el campo de la ingeniería geotécnica con el objeto de poder determinar con mayor precisión la resistencia al corte de la roca tanto en la condición sana como fracturada.

Como es bien conocido, una gran cantidad de intentos se han publicado para definir un criterio teórico que permita predecir la rotura del macizo rocoso, desde que en 1773 Coulomb postulara la primera hipótesis de falla.

La causa fundamental de que ninguno de los criterios existentes haya tenido una utilización universal radica en el hecho de que son muchos los parámetros que gobiernan el proceso de rotura de la roca, factores estos que dependen tanto del propio macizo rocoso como del estado tensional.

Para ello se han desarrollado algunos criterios empíricos que, aunque no poseen el esperado fundamento científico, ofrecen la gran ventaja de acercarse a la realidad del fenómeno físico.

De esta forma Bieniawski [2], utilizando los resultados de los ensayos realizados en la división de geomecánica del CSIR (Council for Scientific and Industrial Research) de Sudáfrica propone utilizar el criterio desarrollado por Murrell [1] y lo expresa en forma adimensional.

En base a lo antes dicho se analiza en detalle en este apéndice la solución exacta al considerar el criterio de falla modificado por Bieniawski [2] para calcular la envolvente de rotura por cizallamiento, la cual proporcione una base adecuada para estimar las tensiones tangenciales tanto en roca intacta como en aquella que exhiba diferentes planos de discontinuidad. En estas condiciones se podrá investigar y resolver gran variedad de problemas que habitualmente se encuentran en el área de la mecánica de las rocas a través de las diferentes obras civiles y mineras.

2. DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CORTE

En el año 1974, en el Journal of the South Institute of Mining and Metallurgy, el profesor Z.T. Bieniawski [2] publica los resultados obtenidos a través de una serie de ensayos realizados en la matriz rocosa, al aplicar el criterio de rotura propuesto por Murrell [1], en la cual la relación entre los esfuerzos principales viene expresada como sigue:

$$\sigma_1 = F \sigma_3^K + \sigma_c \quad (D.1)$$

Donde:

σ_1 = esfuerzo principal mayor en la falla.

σ_3 = esfuerzo principal menor en la falla.

σ_c = resistencia a compresión simple de la roca intacta (matriz rocosa).

F, K = constantes a determinar de la roca.

En forma adimensional tal como lo sugiere Bieniawski, la ecuación anterior se transforma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1 \quad (D.2)$$

La tabla No. D.1 muestra los diferentes valores de A obtenidos por dicho investigador para roca intacta, mientras que K permanece constante para todo tipo de roca siendo su valor de 0,75.

De acuerdo a Ramamurthy [3], a continuación, se indican las ecuaciones para determinar la resistencia a compresión uniaxial y el parámetro A al considerar en el macizo rocoso la presencia de los planos de discontinuidad y el grado de meteorización.

Las ecuaciones se expresan en función de la clasificación geomecánica (Rock Mass Rating–RMR) desarrollada por Bieniawski [4]:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_c)_j &= \sigma_c \cdot \exp\left[\frac{\text{RMR}-100}{18,75}\right] \\ A_j &= A \cdot \exp\left[\frac{\text{RMR}-100}{75,5}\right] \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & \text{(D.3)} \\ & \text{(D.4)} \end{aligned}$$

Siendo $(\sigma_c)_j$ la resistencia a compresión simple de la roca a través de los planos de fractura, la cual es una fracción de σ_c .

Cabe destacar que $(\sigma_c)_j = (\sigma_c)_{joint}$ representa el mismo valor de σ_{cm} previamente definido en la sección 2.2 del capítulo 2

Se observa también que para $\text{RMR} = 100$, $(\sigma_c)_j = \sigma_c$ y $A_j = A$

Tabla D.1. Según Bieniawski [2]

$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1 \therefore K = 0,75$	
Tipo de roca intacta	A
Norita	5,0
Cuarcita	4,5
Limolita	4,0
Lodolita	3,0
Mayoría de las rocas	3,5

Para el caso particular que $K=1$, la ecuación (D.2) está representada por una línea recta, y por ende la resistencia al corte es también lineal, obteniéndose la muy empleada envolvente de rotura de Mohr-Coulomb, en la cual el valor del parámetro A como se demostrará posteriormente corresponde a la bien conocida expresión:

$$A = \tan^2(45^\circ + \phi/2) = \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \quad (D.5)$$

Por otro lado, al considerar la pendiente de la ecuación (D.2) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} \quad (D.6)$$

Adicionalmente, al tener en cuenta que $K < 1$ ($K = 0,75$), es preferible expresar la ecuación anterior como a continuación se indica:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \left[\frac{K \cdot A}{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{1-K}} \right] \quad (D.7)$$

A través de dicha fórmula, y considerando el caso particular en el cual $\sigma_3 = 0$, se observa que:

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) \rightarrow \infty \quad (D.8)$$

Es decir, la tangente a la curva es normal al eje de las abscisas en el origen. Al mismo tiempo indica que el esfuerzo principal menor no puede existir en la rama de esfuerzos negativos o de tracción, lo que sin lugar a dudas es una limitación de este criterio.

Utilizando las ecuaciones de equilibrio en un estado bidimensional y mediante la figura (D.1) se sabe que:

$$\left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (D.9)$$

Por cuanto $\sigma_1 = \zeta(\sigma_3)$, la ecuación (D.9) toma la forma.

$$f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0 \quad (D.10)$$

Donde $\sigma_{\alpha}=\sigma_n$ y τ_{α} representan el esfuerzo normal y tangencial sobre el plano de rotura respectivamente.

Por otra parte, si la familia de líneas planas $f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0$, admite envolvente, las funciones $\sigma_{\alpha}=\psi(\sigma_3)$ y $\tau_{\alpha}=\varphi(\sigma_3)$ que definen las ecuaciones paranébricas de esta envolvente, satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0 \end{array} \right\} \quad (D.11)$$

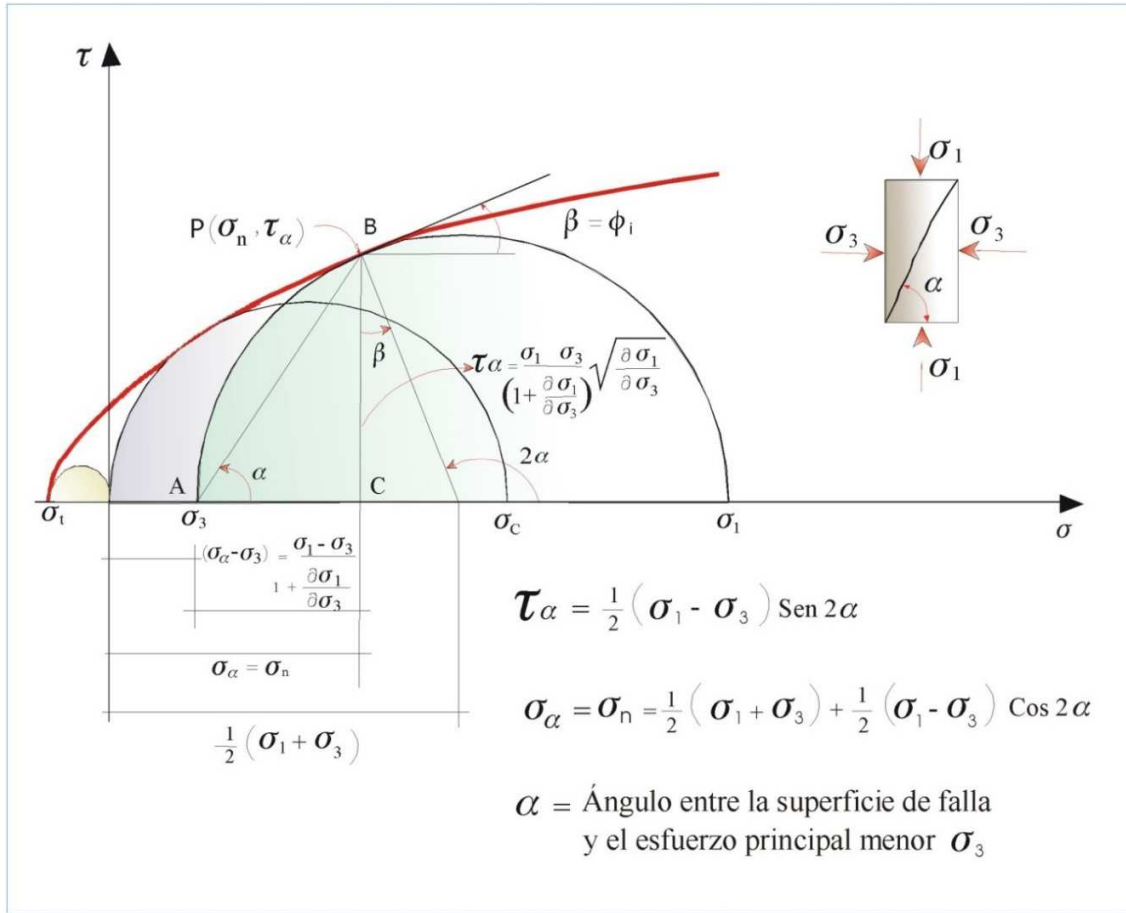


Figura D.1.Envolvente de rotura por cizallamiento de la matriz rocosa en función de los esfuerzos principales

Al considerar (D.11) y la derivada de σ_1 con respecto a σ_3 en ambos lados de la ecuación (D.9) queda:

$$2 \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \right] = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \quad (\text{D.12})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] = 0 \quad (\text{D.13})$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} \quad (D.14)$$

Reemplazando (D.14) en (D.9) y despejando τ_{α} , se obtiene:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} \sqrt{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}} \quad (D.15)$$

Al dividir (D.15) entre (D.14), es posible escribir:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{(\sigma_{\alpha} - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad \therefore \quad \tau_{\alpha} = (\sigma_{\alpha} - \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (D.16)$$

Por otro lado, al observar el triángulo ABC de la figura (D.1), el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (D.17)$$

Al sustituir (D.7) en (D.17) la ecuación anterior se transforma:

$$\tan \alpha = \left[\frac{K \cdot A}{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^{1-K}} \right]^{1/2} \quad (D.18)$$

Igualmente, al observar la figura (D.1), se aprecia que el ángulo que forma el plano de falla α con el esfuerzo principal menor y la inclinación de la envolvente de falla β , están relacionados a través de la expresión:

$$2\alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (D.19)$$

Es decir:

$$\tan\beta \cdot \tan 2\alpha = -1 \quad (D.20)$$

Cabe destacar, que β se conoce también como el ángulo de fricción interna instantáneo ($\beta = \phi_i$)

A la vez utilizando (D.20), la pendiente de la envolvente puede determinarse como sigue:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \left(\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \right) \quad (D.21)$$

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) - 1}{2 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2}} = \tau'_\alpha \quad (D.22)$$

Llamando $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \sigma'_1$, queda por tanto:

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma'_1 - 1}{2(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (D.23)$$

La cual se transforma:

$$\sigma'_1 - 2 \tau'_\alpha (\sigma'_1)^{1/2} - 1 = 0 \quad (D.24)$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau'_\alpha + \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (D.25)$$

Despejando $\sigma_\alpha = \sigma_n$ en (D.13), se tiene:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1 + 1} \right] \quad (D.26)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_{\alpha} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3 \cdot \sigma'_1}{1 + \sigma'_1} \right) \quad (D.27)$$

Al despejar el esfuerzo principal menor σ_3 de la ecuación (D.15) se obtiene:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\tau_{\alpha} (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (D.28)$$

Reemplazando dicho valor en (D.27), queda:

$$\sigma_{\alpha} (1 + \sigma'_1) = \sigma_1 + \sigma'_1 \left[\sigma_1 - \frac{\tau_{\alpha} (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \right] \quad (D.29)$$

Al despejar σ_1 de la ecuación anterior, es posible escribir:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \sqrt{\sigma'_1} \quad (D.30)$$

Sustituyendo (D.25) en (D.24) resulta:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \left[\tau'_{\alpha} + \sqrt{1 + (\tau'_{\alpha})^2} \right] \quad (D.31)$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \cdot \tau'_{\alpha} + \tau_{\alpha} \sqrt{1 + (\tau'_{\alpha})^2} \quad (D.32)$$

Igualmente, el esfuerzo principal menor σ_3 puede expresarse:

$$\sigma_3 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha - \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (D.33)$$

Siendo la diferencia entre los esfuerzos principales:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2\tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (D.34)$$

Elevando (D.25) al cuadrado:

$$\sigma'_1 = (\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} + \left[1 + (\tau'_\alpha)^2 \right] \quad (D.35)$$

Así:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (D.36)$$

Al reemplazar el valor de la pendiente $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$ indicado a través de la ecuación (D.6) resulta:

$$K_A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (D.37)$$

Igualmente al sustituir $\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)$ en (D.27), dicha ecuación se transforma como sigue:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \left[K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^{K-1} \right]}{\frac{1}{\sigma_c} \left[1 + K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^{K-1} \right]} \quad (D.38)$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_1/\sigma_c = (A \cdot \sigma_3^K + 1)$, la ecuación anterior puede expresarse como una función de σ_3 , es decir:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left[A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K \cdot (1+K) + 1 \right] \cdot \sigma_c}{\left[1 + K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^{K-1} \right]} \quad (D.39)$$

Por otro lado, $A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) - 1$, siendo por lo tanto el esfuerzo normal $\sigma_n = \sigma_\alpha$ sobre el plano de fractura como a continuación se indica:

$$\sigma_n = \sigma_\alpha = \frac{\left\{ \left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) - 1 \right] (1+K) + 1 \right\} \sigma_c}{\left[1 + K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^{K-1} \right]} \quad (D.40)$$

Por otra parte, al utilizar la ecuación (D.31) que vincula el esfuerzo principal mayor $\sigma_1 = f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \tau'_\alpha)$ y expresándola en forma adimensional, resulta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} \left[\sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha + \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \right] \quad (D.41)$$

Finalmente, al reemplazar las ecuaciones (D.37) y (D.41) en (D.40), queda:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\left\{ (1+K) \left[\frac{1}{\sigma_c} \left(\sigma_{\alpha} + \tau_{\alpha} \cdot \tau'_{\alpha} + \tau_{\alpha} \left(1 + \tau'^2_{\alpha} \right)^{1/2} \right) \right] - K \right\} \sigma_c}{1 + \left[1 + 2 \tau'^2_{\alpha} + 2 \tau'_{\alpha} \left(1 + \tau'^2_{\alpha} \right)^{1/2} \right]} \quad (D.42)$$

La ecuación diferencial indicada en (D.42) por simple comodidad se expresará en la forma siguiente:

$$x = \frac{\left\{ (1+K) \left[\frac{1}{\sigma_c} \left(x + y \cdot y' + y \left(1 + y'^2 \right)^{1/2} \right) \right] - K \right\} \sigma_c}{1 + \left[1 + 2 y'^2 + 2 y' \left(1 + y'^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (D.43)$$

Siendo por tanto, $x = \sigma_{\alpha}$, $y = \tau_{\alpha}$, e $y' = \frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_{\alpha}} = \left(\frac{dy}{dx} \right)$

En forma adimensional:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right), \quad \bar{y} = \left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) \\ \text{Igualmente,} \quad \bar{y}' &= y' = \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right) = \left(\frac{dy}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \quad (D.44)$$

En estas condiciones la ecuación (D.43) se transforma:

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{1+K}{2} \right) \left[\bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y}' + \bar{y} \left(1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2} \right] - \frac{K}{2}}{1 + \bar{y}'^2 + \bar{y}' \left(1 + \bar{y}'^2 \right)^{1/2}} \quad (D.45)$$

De la ecuación anterior se denotan los siguientes parámetros:

$$\left(\frac{1+K}{2}\right) = K_1 \quad (D.46)$$

y

$$\frac{K}{2} = K_2 \quad (D.47)$$

Por tanto, al reemplazar (D.46) y (D.47) en (D.45) se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{K_1 \left[\bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{y}' + \bar{y} \left(1 + \bar{y}'^2\right)^{1/2} \right] - K_2}{1 + \bar{y}'^2 + \bar{y}' \left(1 + \bar{y}'^2\right)^{1/2}} \quad (D.48)$$

La ecuación anterior puede transformarse mediante simplificaciones como sigue:

$$K_1 \cdot \bar{y} = \bar{x} \left(1 + \bar{y}'^2\right)^{1/2} + (K_1 \cdot \bar{x} - K_2) \left[\bar{y}' - \left(1 + \bar{y}'^2\right)^{1/2} \right] \quad (D.49)$$

Dicha expresión se conoce como la ecuación de Lagrange y puede considerarse como una generalización de la de Clairaut.

Es decir, la fórmula anterior corresponde al tipo [5]:

$$\bar{y} = \bar{x} \xi(\bar{x}) + \psi(\bar{y}') \quad (D.50)$$

2.1. Determinación de la Envolvente de Falla cuando $K = 1$ (Ecuación de Mohr-Coulomb)

Teniendo en cuenta que la pendiente $y = \tan \beta$, la ecuación (D.49) se transforma:

$$K_1 \bar{y} = \bar{x} \sec \beta + (K_1 \bar{x} - K_2) (\tan \beta - \sec \beta) \quad (D.51)$$

Cuando $K = 1$, $K_1 = 1$ y $K_2 = 1/2$, se obtiene:

$$\bar{y} = \bar{x} \sec \beta + \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) (\tan \beta - \sec \beta) \quad (D.52)$$

Al simplificar queda:

$$\bar{y} = \bar{x} \tan \beta + \frac{1}{2} (\sec \beta - \tan \beta) \quad (D.53)$$

$$\bar{y} = \bar{x} \tan \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sec \beta}{\cos \beta} \right) \quad (D.54)$$

Considerando que $\bar{y} = \left(\frac{y}{\sigma_c} \right)$ y $\bar{x} = \left(\frac{x}{\sigma_c} \right)$, resulta:

$$y = x \tan \beta + \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1 - \sec \beta}{\cos \beta} \right) \quad (D.55)$$

También se conoce que $y = \tau_\alpha$ y $x = \sigma_\alpha$, si además $\beta = \phi$ (ángulo de inclinación de la envolvente de falla), la cual es constante, resulta finalmente:

$$\tau_\alpha = \sigma_\alpha \tan \phi + \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1 - \sec \phi}{\cos \phi} \right) \quad (D.56)$$

Por otra parte, se observa que $\frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} \right)$ corresponde al intercepto de la envolvente lineal de falla y se define como el valor de la resistencia al corte a cero esfuerzo normal, y como es bien conocido representa la cohesión (C) de la roca o del suelo.

$$C = \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} \right) \quad (D.57)$$

Cabe destacar que para el caso particular en el cual $K = 1$, la relación entre los esfuerzos principales es lineal, y de acuerdo a la ecuación (D.2), se transforma en la ecuación de la recta:

$$\sigma_1 = A \sigma_3 + \sigma_c \quad (D.58)$$

A la vez, es oportuno mencionar que τ_α está relacionado linealmente con σ_α , siempre y cuando σ_1 dependa linealmente de σ_3 .

En estas condiciones, el próximo paso es determinar el parámetro A, indicado en la ecuación (D.58). Por tanto, considerando que $K=1$ y $\tau'_\alpha = \left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = y' = \tan \beta$ la ecuación (D.37) se transforma como sigue:

$$A = 1 + 2 \cdot \tan^2 \beta + 2 \cdot \tan \beta \cdot \sec \beta \quad (D.59)$$

Mediante transformaciones trigonométricas se obtiene:

$$A = \frac{\cos^2 \beta + 2 \sin^2 \beta + 2 \sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{(1 + \sin \beta)^2}{\cos^2 \beta} \quad (D.60)$$

Por tanto:

$$A = \left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = N_\phi \quad (D.61)$$

Si $\beta = \phi$ (ángulo de fricción interna), resulta finalmente la conocida expresión:

$$A = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{D.62})$$

2.2. Determinación de la Envolvente de Falla cuando $K \neq 1$

Como previamente se ha mencionado la envolvente de falla $\bar{y} = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right)$ se determina al hallar la solución analítica de la ecuación diferencial indicada en (D.49), la cual corresponde a la forma:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = 0 \quad (\text{D.63})$$

Un camino fácil de obtener $\bar{y}$, corresponde en el caso de que la ecuación (D.49), tenga solución singular, lo que implicaría cumplir con las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \cdot \bar{y}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.64})$$

Desafortunadamente la condición expresada a través de (D.64) no se cumple.

La solución de la ecuación (D.49) puede hallarse tal como lo indica Elsgoltz [6], al derivar dicha ecuación con respecto a $\bar{x}$, y haciendo $\bar{y}' = \tan \beta$, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} K_1 \bar{y}' &= \sec \beta + \bar{x} \sec \beta \tan \beta \left(\frac{d\beta}{d\bar{x}} \right) + K_1 (\tan \beta - \sec \beta) + \\ &+ (K_1 \bar{x} - K_2) (\sec^2 \beta - \sec \beta \cdot \tan \beta) \left(\frac{d\beta}{d\bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

Al simplificar queda:

$$\left(\frac{d\bar{x}}{d\beta}\right) + \bar{x} \left[\tan\beta - \left(\frac{K_1}{K_1-1}\right) \sec\beta \right] = -\left(\frac{K_2}{K_1-1}\right) (\sec\beta - \tan\beta) \quad (D.66)$$

Es decir:

$$\left(\frac{d\bar{x}}{d\beta}\right) + \bar{x} p(\beta) + f(\beta) = 0 \quad (D.67)$$

Siendo la solución según Mataix [5]

$$\bar{x} = e^{-\int p(\beta) d\beta} \left[K_3 - \int e^{\int p(\beta) d\beta} \cdot f(\beta) d\beta \right] \quad (D.68)$$

Por lo tanto:

$$y \quad \left. \begin{aligned} p(\beta) &= \left[\tan\beta - \left(\frac{K_1}{K_1-1}\right) \sec\beta \right] \\ f(\beta) &= \left(\frac{K_2}{K_1-1}\right) (\sec\beta - \tan\beta) \end{aligned} \right\} \quad (D.69)$$

En donde K_3 es una constante de integración, y las constantes K_1 y K_2 previamente definidas a través de (D.46) y (D.47).

La solución de la ecuación (D.68) para $K = 3/4$, una vez realizado el proceso de integración es el siguiente:

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \bar{x} = \cos\beta \tan^7\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \left[K_3 + \frac{4 - 3 \cos^2\beta}{(1 - \sin\beta)^3} \right] \quad (D.70)$$

Por otra parte, la constante de integración puede calcularse considerando en (D.37) que $\tau'_\alpha = \dot{\gamma} = \tan\beta$, así:

$$K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 + 2 \tan^2 \beta + 2 \tan \beta \cdot \sec \beta = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) \quad (D.71)$$

Considerando el caso particular de tensiones, en la cual la inclinación de la envolvente de falla $\beta=0$, es decir, $\alpha=(\pi/4+\beta/2) = 45^\circ$ la ecuación anterior toma la forma:

$$K \cdot A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = 1 \quad (D.72)$$

A través de dicha expresión puede escribirse que:

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K = \left(\frac{1}{K \cdot A} \right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (D.73)$$

Al sustituir (D.72) y (D.73) en (D.39) se obtiene para $(\sigma_\alpha/\sigma_c)_{\beta=0}$ la siguiente ecuación:

$$\bar{x} = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} = \frac{\left\{ A \left(\frac{1}{K \cdot A} \right)^{\frac{K}{K-1}} \cdot (1+K) + 1 \right\}}{2} \quad (D.74)$$

Por otra parte, a través de (D.70) y considerando nuevamente que $\beta=0$, el valor de $(\sigma_\alpha/\sigma_c)_{\beta=0}$ es:

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} = (K_3 + 1) \quad (D.75)$$

Finalmente, igualando (D.74) y (D.75) se determina la constante de integración K_3 .

Por lo tanto, para $K = 0,75$ y $A=3$, $A=4$ y $A=5$, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} &\approx 30 \Rightarrow K_3 = 29, A = 3 \\ \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} &\approx 95 \Rightarrow K_3 = 94, A = 4 \\ \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right)_{\beta=0} &\approx 231 \Rightarrow K_3 = 230, A = 5 \end{aligned}$$

Una vez conocida dicha constante, el valor de $\bar{x} = \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right)$ se determina fácilmente, en función de β . A su vez, la inclinación de la envolvente de falla (β) será una función del intervalo de esfuerzos (σ_1, σ_3).

Bajo estas condiciones (τ_{α}/σ_c) se obtiene a través de (D.51), es decir:

$$\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{K_1} \left[\left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \right) \sec \beta - \left(K_1 \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} - K_2 \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \right] \quad (D.76)$$

Finalmente, es importante destacar que las tensiones (σ_{α}/σ_c) y (τ_{α}/σ_c) indicadas en (D.70) y (D.71) están expresadas paramétricamente a través del ángulo β .

3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Con la finalidad de apreciar la importancia de este nuevo método, se considerarán los siguientes ejemplos.

Ejemplo No. 1:

Datos:

$\alpha = 60^\circ$ (ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3)

$$\alpha = (45^\circ + \beta/2) \therefore \beta = 30^\circ$$

Tipo de roca: Limolita $A=3$, $K=0,75$

Condición: Intacta (Ver tabla No. D.1)

Cuando $A=3$, la constante de integración $K_3=29$, por lo tanto a través de la ecuación (D.70) resulta:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \bar{x} = \cos 30^\circ \tan^7 30^\circ \left[29 + \frac{4 - 3 \cos^2 30^\circ}{(1 - \sin 30^\circ)^3} \right]$$

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \bar{x} = 0,80$$

Teniendo en cuenta que $K = 0,75$, $K_1 = (1 + K) / 2 = 0,875$ y $K_2 = K/2 = 3/8$, conjuntamente con la ecuación (D.76) la resistencia al corte normalizado es:

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = \bar{y} = 1,14 \left[0,8 \sec 30^\circ - \left(0,875 \cdot 0,8 - \frac{3}{8} \right) \tan 30^\circ \right] \Rightarrow \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = 0,84$$

Un aspecto importante es poder comparar los valores de (σ_α/σ_c) y (τ_α/σ_c) con los obtenidos al aplicar el criterio original de rotura empírico de Hoek y Brown [7].

Al aplicar dicho criterio de rotura, Úcar [8] ha determinado que²:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c}\right) = \frac{m}{8} \left[\frac{1}{2 \sin^2 \beta} + \sin \beta \right] - \left(\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \\ \text{y} \\ \bar{y} &= \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) = \frac{m}{8} \left(\frac{1 - \sin \beta}{\tan \beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (D.77)$$

²En este caso la relación entre los esfuerzos principales es: $\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}$

Siendo (m) y (s) constantes que depende de las propiedades de la roca.

Los valores de los parámetros (m) y (s) para una roca limolita intacta son: $m=10$ y $s =1$ (ver Hoek y Brown [7]). Por lo tanto para $\beta = 30^\circ$, resulta:

$$\bar{x} = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{10}{8} \left[\frac{1}{2 \sin^2 30^\circ} + \sin 30^\circ \right] - \left(\frac{30}{16} + \frac{1}{10} \right) = 1,15$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{10}{8} \left(\frac{1 - \sin 30^\circ}{\tan 30^\circ} \right) = 1,08$$

Aquí es interesante indicar a través de este ejemplo en particular, que al equiparar el criterio propuesto por Murrell [1], la magnitud de la relación (σ_α/σ_c) y $\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right)$ es aproximadamente un 70% y un 78% respectivamente con relación a los valores obtenidos al aplicar el criterio empírico de rotura propuesto por Hoek y Brown [7].

Sin embargo, sería de gran importancia comparar la envolvente de falla para diferentes valores de A , y sus equivalentes de (m) y (s), con la finalidad de poder llegar a conclusiones bien fundamentadas entre ambas hipótesis de rotura.

Ejemplo No. 2:

En una excavación subterránea a la profundidad de 500,00 m, la presión vertical natural es $\sigma_v=13,50\text{MPa}$ y la horizontal $\sigma_h=5,40\text{MPa}$. Adicionalmente se conoce que $A =5$, $K = 0,75$, el índice de calidad de la roca $\text{RMR}=70$ y la resistencia a compresión simple de la roca en la condición intacta es $\sigma_c=120,00\text{MPa}$.

Se desea determinar el esfuerzo principal mayor en la rotura σ_1 y la resistencia al cizallamiento, bajo la suposición que $\sigma_h=\sigma_3$ (esfuerzo principal menor en la falla). Al aplicar (D.4)

$$A_j = A \cdot \exp \left[\frac{\text{RMR}-100}{75,5} \right] = 5 \cdot \exp \left[\frac{70-100}{75,5} \right] = 3,36$$

A través de (D.71) y reemplazando A por A_j se sabe que:

$$K \cdot A_j \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{K-1} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

$$5,47 = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)$$

Por lo tanto:

$$\beta = 43,70^\circ \quad \text{y} \quad \alpha = \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) = 66,85^\circ$$

Al considerar (D.2) el esfuerzo principal en la rotura es:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = A_j \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^K + 1 = 3,36 \left(\frac{5,40}{120} \right)^{0,75} + 1 = 1,33$$

$$\sigma_1 = 1,33 \cdot \sigma_c = 160,00 \text{ MPa}$$

La constante de integración K_3 se determina igualando las ecuaciones (D.74) y (D.75) y sustituyendo A por A_j , obteniéndose un valor de $K_3 = 46,55$.

Adicionalmente, (σ_α/σ_c) se determina a través de la ecuación (D.70), resultando:

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \cos 43,70^\circ \cdot \tan^7(23,15^\circ) \left[46,55 + \frac{4 - 3 \cdot \cos^2 43,70^\circ}{(1 - \sin 43,70^\circ)^3} \right]$$

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 0,243$$

Una forma de comprobar dicho valor es mediante la conocida ecuación:

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] \cos 2\alpha$$

$$\left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \sin^2 \alpha \quad (D.78)$$

$$\left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = 0,2056 + 0,038 = 0,243$$

Valor que concuerda perfectamente con el de la ecuación anterior.

Finalmente, a través de (D.76) la resistencia al corte normalizada (τ_{α}/σ_c) se calcula como a continuación se indica:

$$\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = \frac{1}{K_1} \left[\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} \sec \beta - \left(K_1 \frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} - K_2 \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \right]$$

En donde:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = 0,243$$

$$K_1 = \left(\frac{1+K}{2} \right) = 0,875$$

$$K_2 = \frac{K}{2} = \frac{3}{8}, \quad \beta = 43,70^{\circ}$$

Resultando: $\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = 0,464$

Igualmente, otra forma de verificar dicho valor es a través de la ecuación:

$$\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right] \sin(2\alpha) = 0,50(1,33 - 0,045) \sin(133,70^{\circ})$$

$$\left(\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c}\right) = 0,464$$

Es decir, se obtiene igual resultado.

4. CONCLUSIONES

Utilizando la modificación llevada a cabo por Bieniawski al expresar en forma adimensional el criterio de rotura propuesto por Murrell, y teniendo en cuenta al mismo tiempo el método analítico desarrollado en esta investigación para determinar la resistencia al corte en rocas, es lógico concluir que se desarrolla un nuevo campo de investigación al aplicar dicha envolvente de falla por cizallamiento.

A la vez, se podrán mejorar los métodos de cálculo en todo lo concerniente a la estabilidad de taludes, en el soporte de excavaciones subterráneas, además de mejorar los procedimientos para estimar la capacidad portante en roca de calidad pobre, en el diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, así como en otras muchas aplicaciones de interés geotécnico.

Por otra parte, es recomendable emplear esta nueva ecuación que gobierna la resistencia al corte en macizos rocosos, y comparar resultados con la bien conocida y empleada envolvente de falla de Mohr-Coulomb; la cual se ha estado utilizando en una forma aproximada, a sabiendas que la verdadera curva de resistencia intrínseca no es lineal.

Finalmente, es importante destacar que la fórmula propuesta por Murrell-Bieniawski, se asemeja bastante al criterio de rotura propuesta por Hobbes [9] para determinar la resistencia del hormigón, en el cual los parámetros obtenidos a través de ensayos triaxiales son $A = 3,70$ y $K = 0,86$. (véase figura 20)

5. COMENTARIOS FINALES SOBRE LA ECUACIÓN DE ROTURA:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = \left[A \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right)^K + 1 \right], \quad K = 0,75$$

Como complemento al presente artículo publicado en el año 2003, el profesor R. Z. Bieniawski, menciona la modificación del referido criterio de rotura en su conferencia:

“Errores en la Aplicación de las Clasificaciones Geomecánicas y su Corrección”, dictado con la asistencia y colaboración de la empresa Geocontrol (Caracterización Geotécnica del Terreno), Madrid, junio de 2011. Para mayor detalle véase la página:

http://www.geocontrol.es/publicaciones/EB189_adif_errores_en_la_aplicacion_bieniawski.pdf.

La ecuación modificada incorporando el índice RMR es la siguiente:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = A_1 + A \sqrt{\frac{RMR}{100}} \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{0,75} \quad (\text{Yudhbir y Bieniawski, 2011})$$

Siendo,

$$A_1 = \exp \left(\frac{RMR - 100}{10} \right)$$

Por otra parte, el valor del parámetro (A), es el mismo como indicado en la tabla N°D.1. Finalmente, se aprecia que al considerar RMR=100, el criterio de rotura bidimensional entre σ_1 y σ_3 en función del índice de calidad se transforma en la ecuación adimensional publicada por Bieniawski en 1974 en el Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy.

6. SIMBOLOGÍA

$A = \tan^2 (45^\circ + \phi/2)$ para el caso particular en el cual $K = 1$ (Criterio de rotura lineal de Mohr -Coulomb).

$A = \text{constante}$, $3 \leq A \leq 5$ para la mayoría de las rocas según Bieniawski aplicando la ecuación de Murrell.

$$A_j = A \exp \left[\frac{RMR - 100}{75,5} \right]$$

$RMR = \text{clasificación geomecánica de Bieniawski}$.

C = cohesión de la roca.

K = constante, $K = 0,75$ para la mayoría de las rocas.

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = (1 + K)/2 \\ K_2 = K/2 \end{array} \right\} \text{ Constantes.}$$

K_3 = constante de integración.

m = constante que depende de las propiedades de la roca y controla la curvatura entre el esfuerzo principal mayor σ_1 y el esfuerzo principal menor σ_3 (Criterio de rotura de Hoek y Brown).

s = constante que depende del tipo de roca $-1 \leq s \leq 0$ (Criterio de rotura de Hoek y Brown).

$$\bar{x} = \sigma_\alpha / \sigma_c$$

$$\bar{y} = \tau_\alpha / \sigma_c$$

α = ángulo que forma el plano de falla con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3 .

β = ángulo que forma la tangente a la curva de resistencia intrínseca (envolvente de falla) con la horizontal, para un determinado intervalo de esfuerzos ($\sigma_\alpha, \tau_\alpha$).

ϕ = ángulo de fricción interna de la roca.

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \text{pendiente de la curva de rotura } \sigma_1 = f(\sigma_3).$$

σ_c = resistencia a compresión simple (sin confinar) en roca intacta.

$(\sigma_c)_j$ = resistencia a compresión simple en la roca medida en el plano de discontinuidad.

σ_h = presión horizontal.

σ_v = presión vertical debido a la columna de roca.

$\sigma_\alpha = \sigma_n$ = esfuerzo normal actuando sobre el plano de falla.

τ_α = resistencia al esfuerzo cortante.

$\tan\beta = \left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tau'_\alpha$ = pendiente de la envolvente de falla.

7. REFERENCIAS

1. MURRELL, S.A., The Effect of Triaxial Stress System on the Strength Rock at Atmospheric Temperatures. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Volume 10, 1965, pp 231-281.
2. BIENIAWSKI, Z.T., Estimating the Strenght of Rock Materials, Journal of the South African Institute of Minig and Metallurgy, Vol. 74, number 8, March 1974, pp 312-320.
3. RAMAMURTHY, T., Stability of Rock Mass, Indian Geotechnical Journal, Vol. 16, No. 1, 74 páginas.
4. BIENIAWSKI, Z.T., Engineering Classification of Jointed Rock Masses. Trans. S. Afr. Inst. Civil Engrs, Vol 15, 1973 pp
5. MATAIX, C. Análisis Algebraico e Infinitesimal, tomo II, Cálculo Integral, 1967, 375 páginas, Editorial Dossat, S.A.
6. ELGOSTS, L. Differential Equations and the Calculus of Variations, Mir Publishers, 1980, 44 0 páginas.
7. HOEK, E. y BROWN T., Empirical Stregth Criterion for Rock Masses, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol 106, No. GT9, Sept., 1980, pp 1013-1035.
8. UCAR, R., Determination of Shear Failure Envelope in Rock Masses, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 112, No. 3, March 1986, pp 303-315.

9. HOBBS, D.W., Y POMEROY, C.D., The Structural Engineer (London), V.52, No. 5, Mayo 1974, pp 151-165.

APÉNDICE E DETERMINACIÓN DE LA ENVOLVENTE DE FALLA POR CIZALLAMIENTO EN MACIZOS ROCOSOS APLICANDO EL CRITERIO DE HOEK Y BROWN¹

Resumen

Se desarrolla una expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos al utilizar el criterio empírico de rotura desarrollado por los investigadores Hoek y Brown, en el cual los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de falla están vinculados a través de la ecuación:

$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c (m\sigma_3/\sigma_c + s)^{1/2}$, siendo σ_c la resistencia a compresión simple de la roca intacta y los parámetros m y s , constantes que depende de las propiedades de la roca.

Aplicando esta nueva hipótesis, conjuntamente con los conceptos matemáticos básicos para obtener la envolvente de una familia de círculos de

¹Artículo publicado en la revista Ciencia e Ingeniería, Volumen XVIII, N°1, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 1986, PP. 83-98

falla, se determina la resistencia al cizallamiento, tal que $\tau_{\alpha}=f(\sigma_{\alpha},\sigma_c,m,s)$, en donde σ_{α} es el esfuerzo normal sobre el plano de rotura. Una expresión de este tipo ayudará a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a la estabilidad de taludes y obras subterráneas, en el diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, estimación de la resistencia por el fuste en roca de baja calidad en cimentación por pilote y otras innumerables aplicaciones relacionadas con el campo de la geotecnia

I. INTRODUCCION

En la década de los setenta, en el Departamento de Ingeniería de Recursos Minerales, de la Escuela de Minas de Londres, Hoek y Brown [1] llevaron a cabo una gran cantidad de ensayos experimentales en rocas de diferentes propiedades geomecánicas, con la finalidad de poder interpretar en detalle el mecanismo de falla en macizos rocosos.

Con esto en mente, y tomando como soporte fundamental el postulado propuesto por Griffith [2], en el cual se establece que para que se produzca la rotura la relación de la tensión principal σ_1 y la tensión principal menor σ_3 debe ser igual a $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 8 \sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3)$, debiéndose cumplir además que $(\sigma_1 + 3\sigma_3) > 0$. Siendo σ_t la resistencia a la tracción, y por lo tanto la resistencia a compresión simple $\sigma_c = 8 \sigma_t$ al considerar $\sigma_3 = 0$.

Así, con dicha hipótesis y las modificaciones y extensiones realizadas por otros investigadores sobre la misma teoría, ambos autores llegaron a obtener un nuevo criterio empírico de falla utilizando una ecuación cuadrática que relaciona σ_1 en función de σ_c y de los parámetros m y s los cuales dependerán a su vez de las propiedades del macizo rocoso.

Por otra parte a través del referido criterio de rotura se obtendría un gran avance en el campo de la mecánica de rocas, si se pudiera lograr la verdadera solución analítica para determinar la resistencia al corte (τ_{α}) bajo un determinado rango de esfuerzos en rocas con diferentes planos de fracturas. Sin embargo, Hoek y Brown [1], sólo lograron determinar en una forma empírica y aproximada la resistencia al cizallamiento debido a lo complejo de hallar un resultado matemáticamente preciso.

En base a lo antes dicho se ha analizado en este trabajo la solución exacta utilizando el criterio de falla ya mencionado para calcular la envolvente de

rotura por cizallamiento, que proporcione una base adecuada para estimar las tensiones tangenciales tanto en roca intacta como en macizos rocosos con diferentes planos de discontinuidad; de forma de poder resolver gran variedad de problemas que habitualmente se encuentran en el área de la mecánica de rocas planteados en las obras mineras o de ingeniería civil.

A través de innumerables ensayos de laboratorio, conjuntamente con los fundamentos que existen sobre fractura y propagación de grieta en roca, Hoek y Brown [1] hallaron la nueva hipótesis de rotura estableciendo la siguiente relación entre las tensiones principales σ_1 y σ_3 , es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left[m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right]^{1/2} \quad (\text{E.1})$$

Donde:

σ_1 = Esfuerzo principal mayor en la rotura

σ_3 = Esfuerzo principal menor en la rotura

σ_c = Resistencia a compresión simple de la roca "intacta"

m, s =Constantes que dependen de las propiedades de la roca

En la tabla E.1, se puede apreciar los diferentes valores de m y s , dependiendo del grado de diaclasamiento y meteorización del macizo. Por otra parte, a través de la figura E.1 se muestra la curva de rotura entre los esfuerzos principales propuesta por Hoek y Brown [1].

La resistencia a compresión simple de la roca intacta σ_c se obtiene al tener en cuenta que no existe confinamiento lateral ($\sigma_3=0$), y que además $s=1$, resultando por tanto a través de (E.1) que $\sigma_1=\sigma_c$.

Cuando el macizo presenta planos de fractura, $s < 1$, la resistencia en la discontinuidad dominante será $\sigma_{cd} = \sigma_c (s)^{1/2}$.

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (E.1) y despejando σ_3 resulta:

$$\sigma_3 = \left[\sigma_1 + \frac{m}{2} \cdot \sigma_c \right] \pm \frac{1}{2} \left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2 \right)^{1/2} \quad (\text{E.2})$$

Tomando la raíz no positiva de $\left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2\right)$ ya que σ_3 corresponde a la tensión principal menor, se tiene por tanto:

$$\sigma_3 = \left[\sigma_1 + \frac{m}{2} \cdot \sigma_c \right] - \frac{1}{2} \left(m^2 \cdot \sigma_c^2 + 4 \cdot m \sigma_1 \cdot \sigma_c + 4 \cdot s \cdot \sigma_c^2 \right)^{1/2} \quad (E.3)$$

La resistencia a la tracción σ_{tm} de la masa rocosa se determina al considerar que $\sigma_1 = 0$, así la ecuación anterior toma la forma:

$$\sigma_3 = \sigma_{tm} = \frac{\sigma_c}{2} \cdot \left[m - \left(m^2 + 4 \cdot s \right)^{1/2} \right] \quad (E.4)$$

A través de (E.1) y (E.4) se aprecian los límites de s , es decir:

Para $s = 1$, $\sigma_1 = \sigma_c$ y $m = m_i$: roca intacta (véase valores de m_i en la tabla E.1)

Si el valor de $s = 0$, $\sigma_3 = \sigma_{tm} = 0$: roca muy fracturada

Por otro lado, considerando nuevamente que $s = 1$, y empleando (E.4) la resistencia a la tracción de la roca intacta se transforma en la siguiente expresión: $\sigma_t = \frac{\sigma_c}{2} \cdot \left[m_i - \left(m_i^2 + 4 \right)^{1/2} \right]$

A la vez se observa que, para otros estados intermedios del macizo rocoso, (s) se encontrará dentro del intervalo $0 < s < 1$.

El valor de $m = m_i$ en roca intacta puede hallarse midiendo el ángulo α que forma la superficie de falla con la dirección del esfuerzo principal menor σ_3 .

Como posteriormente se demostrará, la magnitud de (α) se determina teniendo en cuenta la pendiente de la curva de rotura:

Tabla E.1- Criterio empírico de rotura según Hoek y Brown [1]

$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}$ $\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = A \left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_t}{\sigma_c} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^B$	Q	Roca compuesta de carbonatos: Caliza Dolomía	Roca producto de la litificación y metamorfismo: Lodolita Limolita Lutita Pizarra	Rocas cuarzosas: Arenisca Cuarcita	Rocas ígneas grano fino: Rolita Andesita Basalto	Rocas de grano grueso ígneas y metamórficas: Gabro Granito Diorita Gneis Anfibolita
Roca intacta (Muestras de laboratorio)	500	$m = 7,0$ $s = 1,0$ $A = 0,816$ $B = 0,658$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,14$	$m = 10,0$ $s = 1,0$ $A = 0,918$ $B = 0,677$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,099$	$m = 15,0$ $s = 1,0$ $A = 1,044$ $B = 0,692$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,067$	$m = 17,0$ $s = 1,0$ $A = 1,086$ $B = 0,696$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,059$	$m = 25,0$ $s = 1,0$ $A = 1,220$ $B = 0,705$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,040$
Roca de muy buena calidad no alterada químicamente diacласas espaciadas ± 3 m.	100	$m = 3,5$ $s = 0,1$ $A = 0,651$ $B = 0,679$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,028$	$m = 5,0$ $s = 0,1$ $A = 0,739$ $B = 0,692$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,020$	$m = 7,5$ $s = 0,1$ $A = 0,848$ $B = 0,702$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,013$	$m = 8,5$ $s = 0,1$ $A = 0,883$ $B = 0,705$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,012$	$m = 12,5$ $s = 0,1$ $A = 0,998$ $B = 0,712$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,008$
Rocas de buena calidad ligeramente meteorizadas, diacласas espaciadas 1 - 3 m.	10	$m = 0,7$ $s = 0,004$ $A = 0,369$ $B = 0,669$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,006$	$m = 1,0$ $s = 0,004$ $A = 0,427$ $B = 0,683$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,004$	$m = 1,5$ $s = 0,004$ $A = 0,501$ $B = 0,695$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,003$	$m = 1,7$ $s = 0,004$ $A = 0,525$ $B = 0,698$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,002$	$m = 2,5$ $s = 0,004$ $A = 0,603$ $B = 0,707$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,002$
Roca de mediana calidad con indicios de meteorización, diacласas espaciadas 0,3 - 1 m	1	$m = 0,14$ $s = 0,0001$ $A = 0,198$ $B = 0,662$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0007$	$m = 0,20$ $s = 0,0001$ $A = 0,234$ $B = 0,675$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0005$	$m = 0,30$ $s = 0,0001$ $A = 0,280$ $B = 0,688$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0003$	$m = 0,34$ $s = 0,0001$ $A = 0,295$ $B = 0,691$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0003$	$m = 0,50$ $s = 0,0001$ $A = 0,346$ $B = 0,700$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0002$
Roca de calidad pobre con numerosos planos de discontinuidad, diacласas espaciadas 30 - 500 mm	0,1	$m = 0,04$ $s = 0,00001$ $A = 0,115$ $B = 0,646$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0002$	$m = 0,05$ $s = 0,00001$ $A = 0,129$ $B = 0,655$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0002$	$m = 0,08$ $s = 0,00001$ $A = 0,162$ $B = 0,672$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0001$	$m = 0,09$ $s = 0,00001$ $A = 0,172$ $B = 0,676$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0001$	$m = 0,13$ $s = 0,00001$ $A = 0,203$ $B = 0,686$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,0001$
Roca de calidad muy pobre, altamente diacласada y meteorizada. Diacласas espaciadas < 50 mm	0,01	$m = 0,007$ $s = 0$ $A = 0,042$ $B = 0,534$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0$	$m = 0,010$ $s = 0$ $A = 0,050$ $B = 0,539$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0$	$m = 0,015$ $s = 0$ $A = 0,061$ $B = 0,546$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0$	$m = 0,017$ $s = 0$ $A = 0,065$ $B = 0,548$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0$	$m = 0,025$ $s = 0$ $A = 0,078$ $B = 0,556$ $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = 0$

Q=Índice de calidad de la roca según Barton

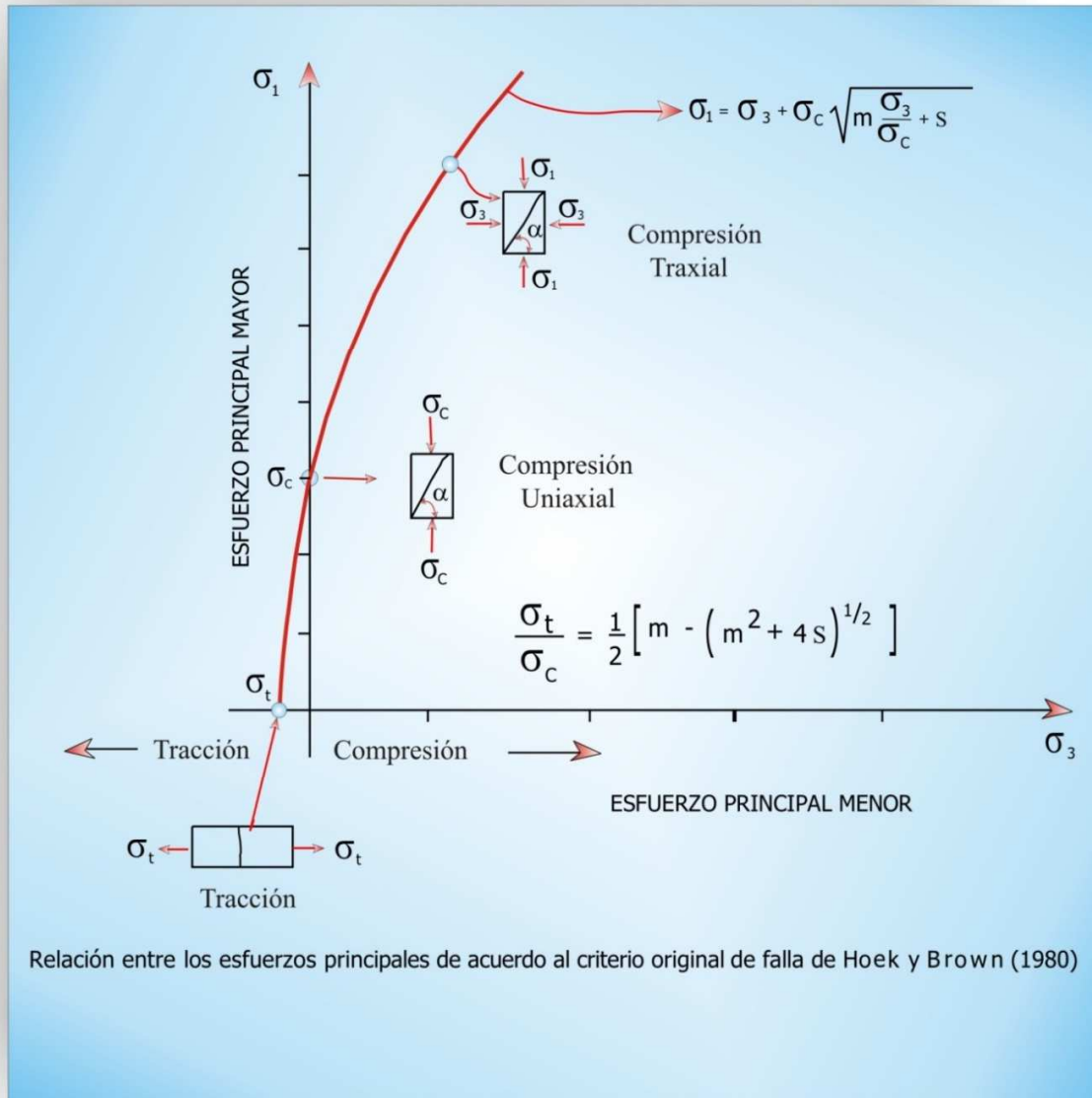


Figura E.1. Curva de rotura de la matriz rocosa aplicando el criterio de Hoek y Brown. La tensión principal mayor $\sigma_1 = f(\sigma_3, m, s, \sigma_c)$.

$$\tan^2 \alpha = \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right] = \left(1 + \frac{m}{2 \left(m \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \right) \quad (\text{E.5})$$

Considerando que:

$S = 1 \therefore$ roca intacta

$\sigma_3 = 0 \therefore$ ensayo de compresión sin confinar

Resulta:

$$\tan^2 \alpha = (1 + m_i/2) \quad (\text{E.6})$$

Por lo tanto, si se conoce aproximadamente el ángulo de rotura, el valor del parámetro $m = m_i$ en la condición intacta es:

$$m_i = 2 (\tan^2 \alpha - 1) \quad (\text{E.7})$$

A través del referido gráfico se observa el ensayo de tracción y compresión simple junto con la prueba de compresión triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$)

Balmer [3], desarrolló una solución analítica para determinar la envolvente de falla para cualquier distribución de presiones σ_1 y σ_3 en el macizo.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio y observando la figura (E.1), se sabe que:

$$\left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (\text{E.8})$$

Donde σ_α y τ_α representan la tensión normal y tangencial actuando sobre el plano de rotura respectivamente.

Tomando la derivada de σ_1 con respecto a σ_3 en ambos lados de la ecuación (E.8) queda:

$$2 \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \right] = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \quad (\text{E.9})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = 0 \quad (\text{E.10})$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) + \sigma_\alpha \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\sigma_\alpha \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) - \sigma_1 - \sigma_3 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 0 \quad (\text{E.12})$$

Obteniéndose finalmente:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_3 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) + \sigma_1}{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right)} = \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} \quad (\text{E.13})$$

Al considerar (E.1) y (E.5) resulta:

$$(\sigma_\alpha - \sigma_3) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} = \frac{2\sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \quad (\text{E.14})$$

Reemplazando (E.13) en (E.8) y despejando τ_α , se obtiene:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)} \sqrt{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}} \quad (\text{E.15})$$

Al dividir (E.15) entre (E.14), la resistencia al corte es:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{(\sigma_{\alpha} - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \therefore \tau_{\alpha} = (\sigma_{\alpha} - \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (\text{E.16})$$

Por otro lado, al observar el triángulo ABC de la figura (E.2), el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2} \quad (\text{E.17})$$

A través de la ecuación (E.1) el valor de $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)$ es el siguiente:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} = \left(1 + \frac{m}{2 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)^{1/2}}\right) \quad (\text{E.18})$$

Transformándose las ecuaciones (E.13), (E.15), (E.17) como a continuación se describen:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_3 + \frac{2\sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s\right)^{1/2}} \quad (\text{E.19})$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{2\sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \left[1 + \frac{m}{2 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \right]^{1/2} \quad (\text{E.20})$$

$$\tan \alpha = \left[1 + \frac{m}{2 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} \right]^{1/2} \quad (\text{E.21})$$

Igualmente, al observar la figura (E.1) se aprecia que el ángulo de rotura α y la inclinación de la envolvente de falla β están relacionados a través de la expresión:

$$2\alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (\text{E.22})$$

$$\tan 2\alpha = \tan (\pi/2 + \beta) \quad (\text{E.23})$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\alpha = -\cot \beta \therefore \tan \beta \cdot \tan 2\alpha = -1 \quad (\text{E.24})$$

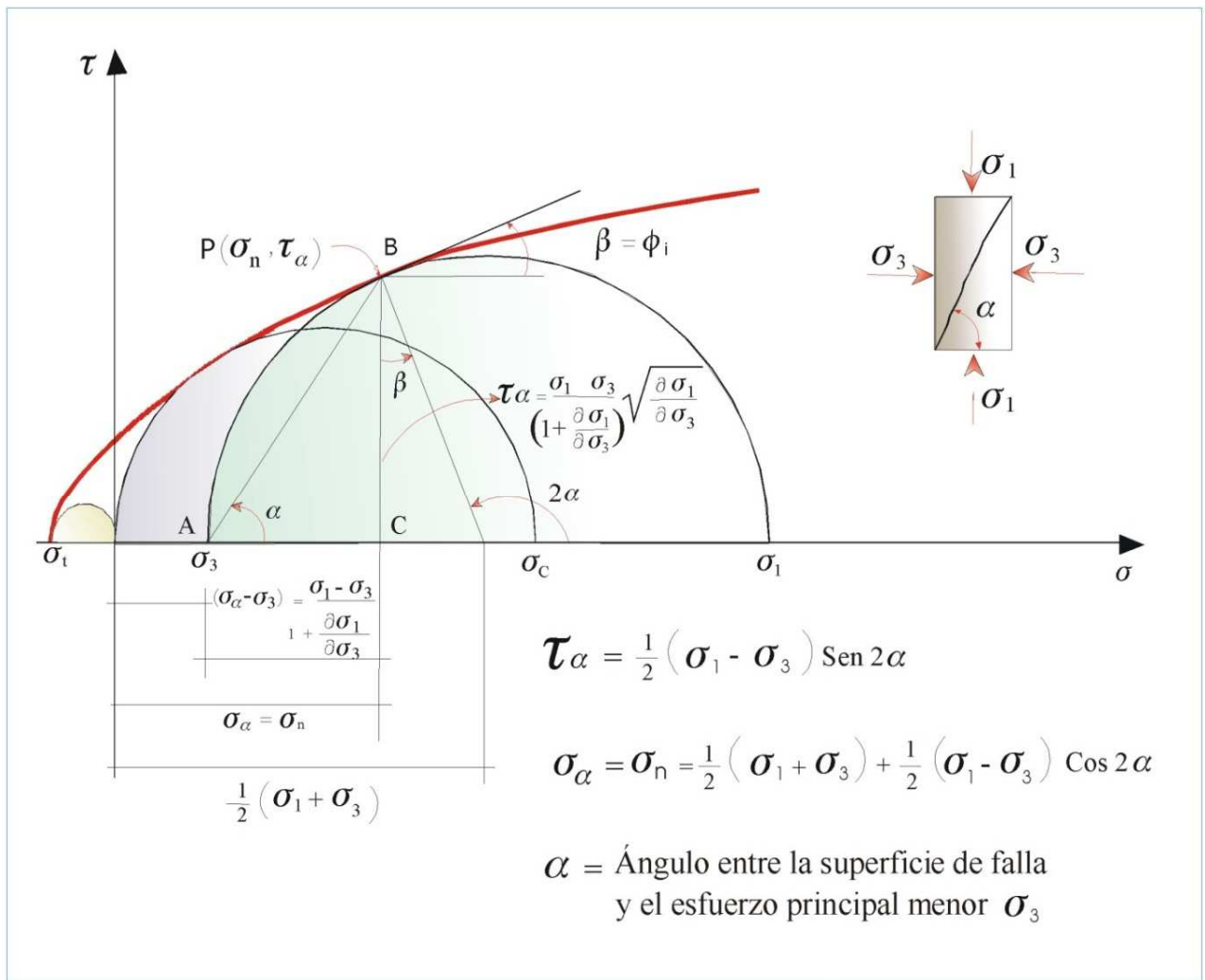


Figura E.2. Envoltente de rotura por cizallamiento de la matriz rocosa en función de las tensiones principales

$$\left(\frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_{\alpha}}\right) = \tan \beta = \left(\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}\right) = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) - 1}{2 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right)^{1/2}} = \tau'_{\alpha} \quad (\text{E.25})$$

Llamando a $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \sigma'_1$, queda entonces:

$$\tau'_{\alpha} = \frac{\sigma'_1 - 1}{2\sqrt{\sigma'_1}} \quad (\text{E.26})$$

La cual se transforma como sigue:

$$\sigma'_1 - 2 \tau'_{\alpha} \sqrt{\sigma'_1} - 1 = 0 \quad (\text{E.27})$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau'_{\alpha} + \sqrt{1 + (\tau'_{\alpha})^2} \quad (\text{E.28})$$

Despejando σ_{α} en (E.11), se obtiene:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1} \right] \quad (\text{E.29})$$

Siendo, además la tensión normal a través (E13):

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \cdot \sigma'_1}{1 + \sigma'_1} \quad (\text{E.30})$$

Por otro lado, el esfuerzo principal menor σ_3 mediante la ecuación (E.15) resulta:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (\text{E.31})$$

Reemplazando dicho valor en (E.30) queda:

$$\sigma_\alpha (1 + \sigma'_1) = \sigma_1 + \sigma'_1 \left[\sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \right] \quad (\text{E.32})$$

Al despejar σ_1 de la ecuación anterior, es posible escribir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \sqrt{\sigma'_1} \quad (\text{E.33})$$

Sustituyendo (E.28) en (E.33) se obtiene:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \left[\tau'_\alpha + \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \right] \quad (\text{E.34})$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha + \tau_\alpha \cdot \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{E.35})$$

Igualmente

$$\sigma_3 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha - \tau_\alpha \cdot \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{E.36})$$

Siendo la diferencia entre ambas ecuaciones:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{E.37})$$

Elevando (E.28) al cuadrado:

$$\sigma'_\alpha = (\tau'_\alpha)^2 + 2 \tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} + \left[1 + (\tau'_\alpha)^2 \right] \quad (\text{E.38})$$

Así,

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{E.39})$$

Remplazando $\left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c}$ de la ecuación (E.1) en (E.21)

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} = \left[1 + \frac{m \sigma_c}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} \right]^{1/2} \quad (\text{E.40})$$

Por tanto, la ecuación (E.39) se convierte:

$$1 + \frac{m \sigma_c}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} = 1 + 2(\tau'_\alpha)^2 + 2\tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} \quad (\text{E.41})$$

Finalmente, se conoce de acuerdo a (E.37) que $(\sigma_1 - \sigma_3) = 2\tau_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2}$, por tanto la ecuación anterior se transforma al realizar las simplificaciones respectivas, en la siguiente forma:

$$\frac{m \sigma_c}{8} = \tau'_\alpha \cdot \tau_\alpha \left\{ \tau'_\alpha \sqrt{1 + (\tau'_\alpha)^2} + \left[1 + (\tau'_\alpha)^2 \right] \right\} \quad (\text{E.42})$$

2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

La ecuación diferencial indicada en (E.42), por simple comodidad se expresa de la manera siguiente:

$$\frac{m\sigma_c}{8} = y' y \left[y' \sqrt{1 + (y')^2} + \left(1 + (y')^2 \right) \right] \quad (\text{E.43})$$

Siendo por tanto, $y = \tau_\alpha$, $y' = \left(\frac{dy}{dx} \right) = \tau'_\alpha \quad \therefore \quad x = \sigma_\alpha$

Al estudiar dicha ecuación se aprecia que corresponde a la forma⁵:

$$F(y, y') = 0 \quad (\text{E.44})$$

Introduciendo un nuevo parámetro β , y reemplazando en (E.44) las ecuaciones $y = \psi(\beta)$, $y' = \theta(\beta)$, se tiene:

$$F[\psi(\beta), \theta(\beta)] = 0 \quad (\text{E.45})$$

Además:

$$y' = \left(\frac{dy}{dx} \right) = \psi'(\beta) \frac{d\beta}{dx} \quad \therefore \quad dy = \psi'(\beta) d\beta \quad (\text{E.46})$$

Por otro lado:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\psi'(\beta) d\beta}{\theta(\beta)} \quad (\text{E.47})$$

Integrando la ecuación anterior resulta:

$$\sigma_\alpha = x = \int \frac{\psi'(\beta)}{\theta(\beta)} d\beta + C \quad (\text{E.48})$$

Siendo C una constante de integración.

Teniendo en cuenta que $y' = \theta(\beta) = \tan \beta$ (pendiente de la envolvente) la ecuación (E.43) se transforma:

$$y = \frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{1}{\tan \beta (\tan \beta \cdot \sec \beta + \sec^2 \beta)} \right] \quad (E.49)$$

Llevando a cabo las simplificaciones trigonométricas, queda la siguiente expresión:

$$y = \tau_\alpha = \frac{m\sigma_c}{8} \left(\frac{1 - \sen \beta}{\tan \beta} \right) \quad (E.50)$$

Es decir:

$$\tau_\alpha = \frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{(1 - \sen \beta)(1 - \sen^2 \beta)^{1/2}}{\sen \beta} \right] \quad (E.51)$$

Igualmente se sabe que $\frac{dy}{d\beta} = \psi'(\beta)$, por lo tanto según (E.50) se tiene:

$$\left(\frac{dy}{d\beta} \right) = -\frac{m\sigma_c}{8} \left(\frac{\cos \beta \cdot \tan \beta + (1 - \sen \beta) \tan \beta}{\tan^2 \beta} \right) \quad (E.52)$$

Simplificando resulta:

$$\psi'(\beta) = -\frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{1}{\sen^2 \beta} - \sen \beta \right] \quad (E.53)$$

A la vez, de acuerdo a (E.48) se aprecia que:

$$\sigma_\alpha = x = -\frac{m\sigma_c}{8} \int \left(\frac{1}{\sen^2 \beta} - \sen \beta \right) \frac{d\beta}{\tan \beta} + C \quad (E.54)$$

Al integrar (E.54), se obtiene:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{1}{2\sin^2\beta} + \sin\beta \right] + C \quad (\text{E.55})$$

Condiciones de Borde:

Utilizando las ecuaciones (E.26) y (E.18), y al mismo tiempo teniendo en cuenta el caso particular cuando $\sigma_3 \rightarrow \frac{\sigma_c}{m}s$, se tendrá por tanto:

$$\tau'_{\alpha} = \left(\frac{d\tau_{\alpha}}{d\sigma_{\alpha}} \right) = \tan \beta = \frac{\sigma'_1 - 1}{2(\sigma'_1)^{1/2}}$$

$$\tan \beta = \frac{m}{4 \left[\left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right) + \frac{m}{2} \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2} \right]} \rightarrow \infty \quad \therefore \beta \rightarrow \pi/2$$

$$\lim \sigma_3 \rightarrow -\frac{\sigma_c}{m}s$$

En estas condiciones, al considerar (E.19) resulta:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_3 + \frac{2\sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)}{m + 4 \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^{1/2}} = \sigma_3 = -\frac{\sigma_c}{m}s$$

$$\lim \sigma_3 \rightarrow -\frac{\sigma_c}{m}s$$

Por lo tanto, al reemplazar $\sigma_{\alpha} = -\frac{\sigma_c}{m}s$ y $\beta = \pi/2$ en (E.55) se obtiene la constante de integración(C), es decir:

$$-\frac{\sigma_c}{m}s = \frac{m\sigma_c}{8} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + C \quad (\text{E.56})$$

$$C = \frac{3m}{16} \sigma_c - \frac{\sigma_c}{m} s = -\sigma_c \left(\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \quad (\text{E.57})$$

Quedando finalmente la ecuación (E.55) expresada de la forma siguiente:

$$\sigma_\alpha = \frac{m\sigma_c}{8} \left[\frac{1}{2\sin^2 \beta} + \sin \beta \right] - \sigma_c \left(\frac{3m}{16} + \frac{s}{m} \right) \quad (\text{E.58})$$

Cabe destacar que las tensiones τ_α y σ_α indicadas en (E.50) y (E.58) están representadas paramétricamente en función del ángulo β .

El paso siguiente es reemplazar el valor de $\sin \beta$ en la ecuación (E.51), con la finalidad de obtener la resistencia al corte $\tau_\alpha = f(\sigma_\alpha, \sigma_c, m, s)$. Lo anterior indica que será necesario transformar la ecuación (E.58), como a continuación se describe:

$$\sin^3 \beta - k \sin^2 \beta + \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{E.59})$$

Donde:

$$k = \frac{8}{m^2} \left[\left(m \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_c} + s \right) \right] + \frac{3}{2} \quad (\text{E.60})$$

Siendo la solución de la ecuación cúbica, la siguiente:

$$\sin \beta = \frac{k}{3} \left\{ 2 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27}{4k^3} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] + 1 \right\} \quad (\text{E.61})$$

Para el caso particular que $\frac{27}{4k^3} \rightarrow 0$, por supuesto $\sin \beta \rightarrow 0$.

Por otra parte, al considerar que $\sin^3 \beta$ es un infinitésimo de orden superior, y puesto que el valor de k es grande, entonces $k \sin^2 \beta \gg \sin^3 \beta$. Es decir:

$$\frac{1}{2} - k \operatorname{sen}^2 \beta = 0 \quad (\text{E.62})$$

$$\operatorname{sen} \beta = \left(\frac{1}{2k} \right)^{1/2} \quad (\text{E.63})$$

Transformándose por lo tanto la ecuación (E.51) en la siguiente forma reducida:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \approx \frac{m}{8} (2k)^{1/2} \quad (\text{E.64})$$

3. APLICACION PRÁCTICA

Ejemplo N°1

Roca: Granito

Características: Macizo de muy buena calidad, ligeramente meteorizado, con diaclasas espaciadas a ± 2 m. Con estas características, de acuerdo a la tabla E.1, se aprecia:

$$m = 2,5, s = 0,004, \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -0,002, \quad A = 0,603, \quad B = 0,707$$

También se ha considerado que: $\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} = 2$

A) Solución exacta:

A través de las ecuaciones (E.60) y (E.61) se tiene:

$$k = \left[\frac{8}{6,25} (5 + 0,04) + \frac{3}{2} \right] = 7,905$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{7,905}{3} 2 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{27}{4 \cdot 493,976} \right) + 240^\circ \right] + 1 = 0,2557$$

Por tanto, de acuerdo a (E.51), se obtiene:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = 0,8793 \quad (\text{Método A})$$

B) Aplicando el método aproximado propuesto por Hoek y Brown, en base a lo indicado en la tabla E.1, resulta:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = A \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right)^B = 0,603(2+0,002)^{0,707} = 0,985 \quad (\text{Método B})$$

Ejemplo N°2

Roca: Anfibolita

Características: Macizo de calidad muy pobre altamente diaclasado y meteorizado, diaclasas < 50 mm. Según la tabla E.1, se tiene:

$$m=0,025, \quad s=0, \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_c}=0, \quad A=0,078, \quad B=0,556$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_c} = 10$, resulta:

$$k = \left[\frac{80}{0,025} + \frac{3}{2} \right] = 3.201,50$$

Puesto que al sustituir el valor de k en la ecuación (E.61), $\sin \beta \rightarrow 0$, se utilizará por tanto la expresión (E.64), es decir:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} \approx \frac{m}{8} (2k)^{1/2} = \frac{0,025}{8} (6,403)^{1/2} = 0,250 \quad (\text{Solución exacta})$$

De acuerdo a Hoek y Brown, se obtiene:

$$\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_c} = 0,078(10)^{0,556} = 0,281 \quad (\text{Método B})$$

4. CONCLUSIONES

Utilizando la excelente contribución llevada a cabo por Hoek y Brown bajo la nueva hipótesis de rotura que relaciona los esfuerzos principales en el instante de la falla mediante una expresión cuadrática, y teniendo en cuenta al mismo tiempo el método analítico para evaluar la resistencia al corte en rocas, desarrollado en este trabajo, es lógico concluir que se abre un nuevo campo de investigación a través de dicha envolvente de falla por cizallamiento en todo lo concerniente a estabilidad de taludes, en el diseño y soporte de túneles, así como nuevos métodos de cálculo en fundaciones en roca de calidad pobre, y en diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, como también otros problemas que generalmente se presentan en el campo de la geotecnia.

Por otro lado, dicha fórmula reemplaza la envolvente de falla de Mohr-Coulomb, la cual se ha estado utilizando en una forma aproximada, a sabiendas que la verdadera ecuación que gobierna la resistencia al corte en las rocas no es una recta.

Por último, quizás el problema más difícil, se le presenta al ingeniero geotécnico, en el momento de escoger los verdaderos valores de los parámetros m y s . Estos dependen de las propiedades del macizo rocoso junto con un comportamiento complejo en función del estado de tensiones y deformaciones; el cual en forma simplificada es estudiado y analizado a través de las clasificaciones geomécanicas.

5. REFERENCIAS

1. HOEK, E y BROWN, T "Empirical Strength Criterion for Rocks Masses", Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 106, N° 079. 1013-1035 (1980)
2. GRIFFITH, A "The Phenomena of Rupture and flow in solids", Phil, Trans. Royal Society, Series A, Vol. 221. 163-198 (1921)
3. BALMER, G "A General Analytical Solution for Mohr's Envelope", American Society of Testing Materials, Vol. 152, 1260-1275 (1952)
4. NAVARRO, P y RIOS, S "Curso Preliminar de Análisis Matemático", Editorial Dossat, S.A., 626 (1958)

5. ELSGOLTS, L "Differential Equations and Calculus of Variations", Moscow, Mir Publishers, 440 (1980)

6. AGRADECIMIENTOS

El autor quiere expresar su más sincero agradecimiento a los profesores Gerard Defives, Florencio Plachco y Lucas Rojas, del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, por la valiosa colaboración prestada durante la elaboración del mismo.

Igualmente reitero mi testimonio de gratitud al Ing. Miguel de Luca, de la Empresa EPICA.

APÉNDICE F EXPRESIONES ANALÍTICAS AL APLICAR EL CRITERIO LINEAL DE ROTURA DE MOHR -COULOMB

I. INTRODUCCIÓN

Un aspecto fundamental que debe mencionarse a través de este apéndice, es que el criterio lineal de rotura se caracteriza por ser ampliamente utilizado en el campo de la geotecnia, aun cuando presenta limitaciones.

Además, por su simplicidad es una herramienta básica para el ingeniero por cuanto permite resolver innumerables problemas relacionados con fundaciones, excavaciones a cielo abierto y obras subterráneas, entre otros.

En el apéndice (D) se demuestra analíticamente que, al ser la relación entre los esfuerzos principales lineal, también es lineal la relación entre la resistencia al corte y el esfuerzo normal actuando sobre el plano de rotura, la cual corresponde a la bien conocida y empleada ecuación de Mohr-Coulomb.

Por tal motivo, es de interés relacionar los parámetros resistentes utilizando este importante criterio como a continuación se lleva a cabo.

2. RELACIÓN ENTRE LOS PARÁMETROS RESISTENTES - ROCA INTACTA

- Criterio de Mohr-Coulomb en función los esfuerzos principales (σ_1, σ_3)

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) + 2 \cdot C \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{F.1})$$

Teniendo en cuenta que el plano de rotura $\alpha = (\pi/4 + \phi/2)$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \alpha + 2 \cdot C \cdot \tan \alpha \quad (\text{F.2})$$

Siendo, además:

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) = N_\phi \quad (\text{F.3})$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \left(\frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right) = N_\phi^{1/2} \quad (\text{F.4})$$

- Relación entre la resistencia al corte τ_α y la tensión normal σ_n

$$\tau_\alpha = C + \sigma_n \tan \phi \quad (\text{Ecuación de Mohr - Coulomb - Ver apéndice D}) \quad (\text{F.5})$$

A continuación, se deducen algunas expresiones de interés, las cuales permiten relacionar los parámetros resistentes.

- 1) Relación entre la resistencia a compresión sin confinar σ_c y atracción σ_t .

Ensayo de compresión sin confinar

Condiciones de borde: $\sigma_3 = 0$, por lo tanto $\sigma_1 = \sigma_c$

Reemplazando dichos valores en la ecuación (F.1) se obtiene la resistencia a compresión sin confinar en términos de C y ϕ , es decir:

$$\sigma_c = 2.C \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{F.6})$$

A la vez, la ecuación (F.1) puede expresarse en forma compacta como sigue:

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + \sigma_c \quad (\text{F.7})$$

Ensayo de tracción

Condiciones de borde: Al Considerar $\sigma_3 = \sigma_t, \sigma_1 = 0$.

Al aplicar la ecuación (F.7), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sigma_t = -\frac{\sigma_c}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = -\sigma_c \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{F.8})$$

Por lo tanto, la relación entre la resistencia a compresión simple y a la tracción está representada por la ecuación.

$$\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{F.9})$$

Siendo la tangente del ángulo de rotura $\alpha = (\pi/4 + \phi/2)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right|} \quad (\text{F.10})$$

El próximo paso es representar la ecuación (F.1) en forma segmentaria o canónica, por cuanto permite expresarla en forma sencilla cuando se conoce el segmento de recta definido por los puntos: $(0, \sigma_c)$ y $(\sigma_t, 0)$.

En estas condiciones la ecuación (F.7) se transforma:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3 \tan^2(\pi/4 + \phi/2)}{\sigma_c} = 1 \quad (\text{F.11})$$

Por tanto,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \left[\frac{\sigma_3}{-\frac{\sigma_c}{\tan^2(\pi/4 + \phi/2)}} \right] = 1 \quad (\text{F.12})$$

Resultando finalmente al considerar la ecuación (F.8):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_t} = 1 \quad (\text{F.13})$$

Para mayor detalle, véase figura (F.1)

2) Determinación de la cohesión en función de σ_c y σ_t

El valor de la cohesión en términos de la resistencia a compresión sin confinar y atracción, se obtiene reemplazando la tangente del ángulo de rotura representada a través de (F.10) en (F.6).

$$\sigma_c = 2.C \sqrt{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right|} \quad (\text{F.14})$$

Al despejar el valor de la cohesión queda,

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{|\sigma_c \cdot \sigma_t|} \quad (\text{F.15})$$

3) Obtención del ángulo de fricción interna en función de σ_c y σ_t

Despejando $\sin \phi$ en la ecuación (F.3), se obtiene que:

$$\operatorname{sen} \phi = \left[\frac{\tan^2 (\pi / 4 + \phi / 2) - 1}{\tan^2 (\pi / 4 + \phi / 2) + 1} \right] \quad (\text{F.16})$$

Por otra parte, al sustituir el valor de $\tan^2 (\pi / 4 + \phi / 2)$ a través de la ecuación (F.10) en (F.16), resulta:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \phi &= \left(\frac{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| - 1}{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| + 1} \right) \\ \phi &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| - 1}{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| + 1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.17})$$

4) Determinación del coeficiente de rozamiento interno $\mu = \tan \phi$ en suelos granulares en función de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 .

Si la masa de suelo investigada es granular, es decir $C=0$, la ecuación (F.5) que representa la resistencia al corte se reduce a la siguiente expresión:

$$\tau_\alpha = \sigma_n \tan \phi \quad (\text{F.18})$$

Por otra parte, se sabe que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{F.19})$$

Reemplazando (F.19) en (F.18), y despejando $\mu = \tan \phi$, resulta:

$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} 2\alpha}{\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \tan \alpha}{\sigma_1 + \sigma_3 \tan^2 \alpha} \quad (\text{F.20})$$

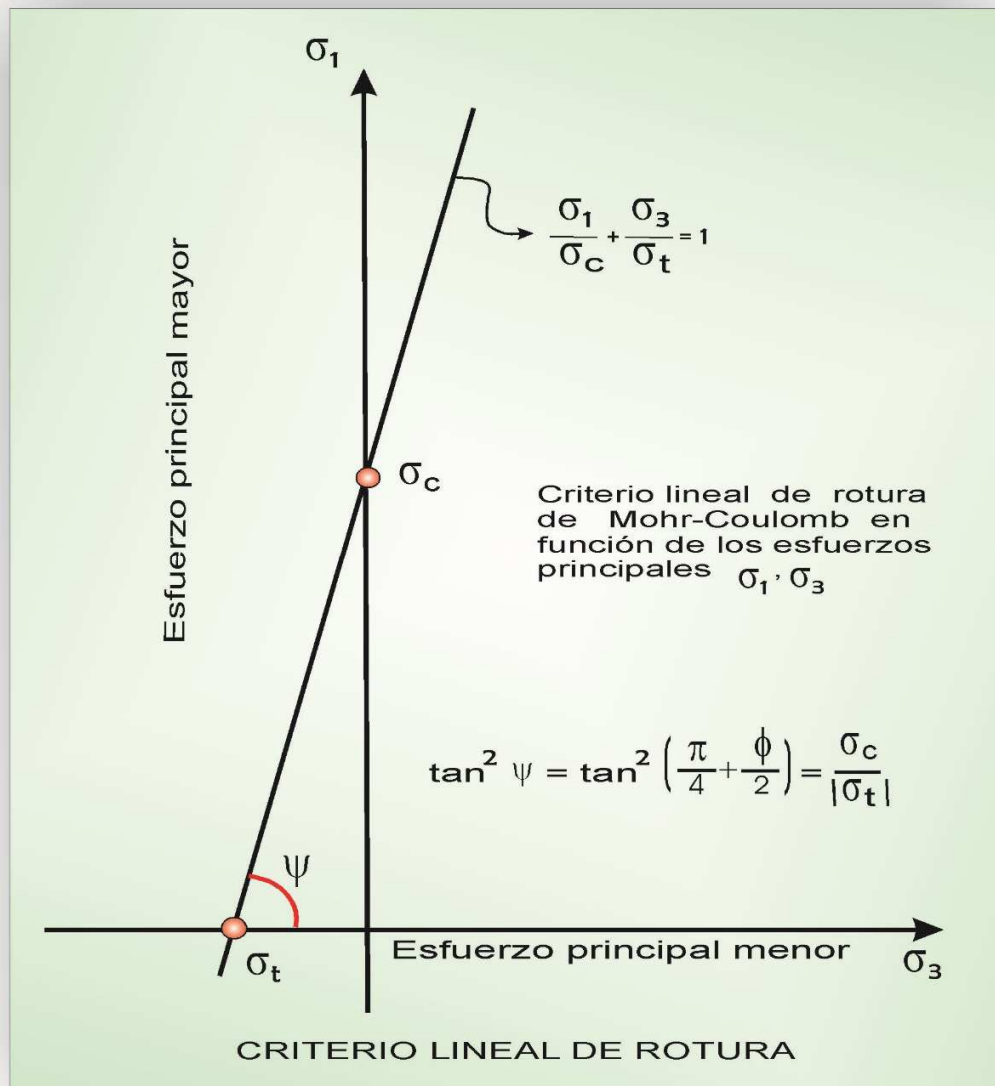


Figura F.1 Ecuación segmentaria de la recta representando el criterio de rotura de Mohr-Coulomb

Considerando en (F.2) que $C=0$, resulta: $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \alpha$.

Siendo α el ángulo que forma el plano de rotura con el esfuerzo principal menor.

En función del valor arriba indicado, la ecuación (F.20) se transforma en función de los esfuerzos principales como sigue:

$$\tan \phi = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}}}{2\sigma_1} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2\sqrt{\sigma_1 \sigma_3}} \quad (F.21)$$

Algunos aspectos a mencionar sobre las limitaciones de dicho criterio son las siguientes:

- La ecuación lineal entre los esfuerzos principales no tiene en cuenta la tensión principal intermedia σ_2
- Goodman [1], menciona que no es razonable admitir la resistencia friccionante en la presencia de esfuerzos de tracción, por cuanto la ecuación de Mohr-Coulomb $\tau_a = C + \sigma_n \cdot \tan \phi$ pierde su validez física en la zona de tracción.
- Muchos investigadores recomiendan, crear una línea de corte en la región de tracción (Tensión Cutoff), tal como se muestra en la figura (F.2). En estas condiciones se obtiene que la resistencia al corte es cero cuando $\sigma_3 = \sigma_t$.
- Sobrevalora la resistencia a tracción.
- A través de las diferentes pruebas experimentales se ha determinado que la pendiente de la curva de resistencia intrínseca decrece con el incremento de la presión de confinamiento. Por otra parte, al aplicar el criterio de rotura lineal la pendiente es constante
- Lo anterior demuestra que la envolvente de rotura **no lineal** se ajusta mejor al fenómeno físico al compararse con la ecuación de la recta de Mohr-Coulomb.

- También, a través del referido criterio es difícil determinar los parámetros de corte en forma global teniendo en cuenta los planos de discontinuidad y los puentes de roca sana.

Por tal motivo, se ha tratado de obtener valores de la cohesión y fricción del macizo rocoso a partir de expresiones del criterio de Hoek y Brown, junto con las clasificaciones geomecánicas, mediante cálculos que no son directos o inmediatos. Esto se debe a que la principal dificultad estriba en que el criterio de HB no es lineal, y por lo tanto los referidos parámetros C y ϕ no son constantes, sino que dependen de la tensión normal σ_n .

Cabe destacar que dichos autores a través de su criterio no lineal empleando además el conocido programa Roc Lab, determinan los valores C y ϕ equivalentes para cada intervalo de tensiones σ_n . (<http://www.rocscience.com/assets/files/uploads/8079.pdf>)

Úcar [2] en su Manual de Anclajes en Ingeniería Civil, también ha desarrollado una metodología analítica para calcular los referidos parámetros equivalentes utilizando el criterio de Hoek y Brown, con aplicación a la estabilidad de taludes y excavaciones subterráneas.

Bieniawski [3] en su libro Engineering Rock Mass recomienda los siguientes parámetros en función del índice de calidad de la roca RMR

Valores de RMR

Calidad	100 - 81	80 - 61	60 - 41	40 - 21	< 20
Cohesión (MPa)	> 25	15-25	8,5-15	4,5-8,5	<4,5
ϕ (grados)	>65	55-65	41-48	48-55	<41

A la vez, menciona la siguiente relación obtenida por Trunk y Hönish, en función de cuarenta casos estudiados:

$$\phi = 0,5RMR + 8,3 (\pm 7,2) \quad (F.22)$$

Por supuesto, al considerar los parámetros resistentes previamente indicados, éstos deben tomarse con mucha precaución.

Finalmente, es de importancia mencionar los resultados obtenidos por Torres [4] a través de sus estudios experimentales en probetas de concreto y cuyos resultados se pueden observar en la tabla 15, de la sección 1.13, especialmente en los valores correspondientes a la resistencia:

$$\sigma_c = f'_c = 33,00 \text{ MPa} \text{ y } \sigma_t = -3,50 \text{ MPa}$$

Si se emplea el criterio lineal, al aplicar las ecuaciones (F.10) y (F.15), el valor de la cohesión y del ángulo de fricción interna es por lo tanto,

$$\left| \frac{f'_c}{\sigma_t} \right| = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = 9,43 \quad \therefore \phi = 53,92^\circ$$

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{|\sigma_c \sigma_t|} = \frac{1}{2} \sqrt{|33,00(-3,50)|} = 5,27 \text{ MPa}$$

Por otra parte, estos resultados no concuerdan con la ecuación lineal obtenida mediante el ajuste de mínimos cuadrados (véase sección 1.13.1), y representada por la fórmula:

$$\frac{\sigma_1}{f'_c} = 1 + k \left(\frac{\sigma_3}{f'_c} \right), \quad k = 3,14$$

$$k = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) = 3,14 \quad \therefore \phi = 31,12^\circ$$

Obsérvese, que en este caso la resistencia a compresión simple es 3,14 veces la de tracción. Lógicamente dicho resultado no concuerda con el valor real obtenido en el laboratorio, en el cual la relación $f'_c/\sigma_t = 9,43$. Por otro lado, hay que destacar que en el referido criterio lineal de rotura se obtuvo el mayor error estándar

Al tener en cuenta la ecuación (115) de la sección 1.13.1, el valor de la cohesión es:

$$C = \frac{f'_c}{2 \cdot \tan(\pi/4 + \phi/2)} = \frac{33,00 \text{ MPa}}{2 \sqrt{3,14}} = 9,13 \text{ MPa}$$

Como previamente se ha mencionado, estas diferencias tan notables en los resultados al aplicar el criterio lineal de Mohr-Coulomb se debe a que la resistencia friccional ($\sigma_n \cdot \tan \phi$) en la presencia de esfuerzos de tracción pierde su validez física. Por lo tal motivo, es práctica común dividir la envolvente en una zona de compresión aplicando la ecuación lineal de Mohr-Coulomb, y una línea de corte en la región sometida a tracción "**tensión cutoff**", tal como se puede observar a través de la figura (F.2)

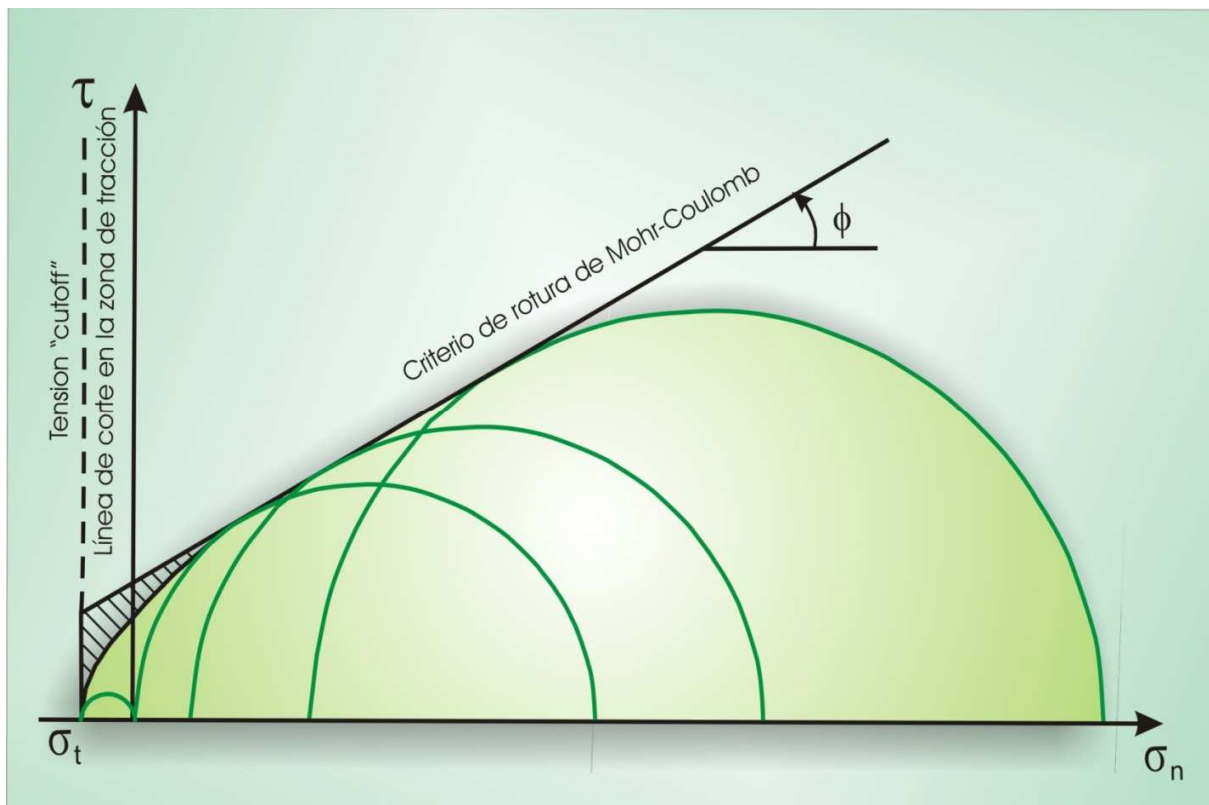


Figura F.2 Envolvente de Mohr-Coulomb con línea de corte "**tensión cutoff**" según Goodman [1] en la región sometida a tracción. Dentro de la zona rayada se observa una *sobreestimación de la resistencia*.

3. EJEMPLO DE APLICACIÓN A TRAVÉS DEL CÁLCULO APROXIMADO DE LOS PARÁMETROS DE CORTE, AL CONSIDERAR LA PERSISTENCIA DE LAS DISCONTINUIDADES.

En esta sección, se describe con un ejemplo práctico el procedimiento para obtener la resistencia aproximada en rocas fracturadas a través del modelo propuesto por Terzaghi, el cual menciona Pariseau [5] en su libro Design Analysis in Rock Mechanics. Básicamente, a través del concepto de persistencia se estudia los planos de discontinuidad y los puentes de roca sana entre segmentos fracturados.

Es un parámetro que no es fácil de cuantificar, en especial cuando no se puede visualizar en detalle el afloramiento

Si el área de roca **intacta y fracturada** se denotan por A_i y A_f respectivamente, y definiendo la persistencia p como la relación entre A_f y el área total $A=(A_i+A_f)$, resulta por lo tanto que:

$$p=A_f/ (A_i+A_f).$$

En estas condiciones, es posible escribir las siguientes expresiones para determinar la resistencia global o promedio τ_p de la masa rocosa en función de la roca intacta y diaclasada.

$$\tau_p = \tau_i \left(\frac{A_i}{A} \right) + \tau_f \left(\frac{A_f}{A} \right) \quad (\text{F.23})$$

Siendo τ_i y τ_f la resistencia de la roca intacta y fracturada respectivamente.

$$\tau_p = \tau_i \left(\frac{A-A_f}{A} \right) + \tau_f \left(\frac{A_f}{A} \right) \quad (\text{F.24})$$

$$\tau_p = \tau_i (1-p) + \tau_f \cdot p \quad (\text{F.25})$$

$$\tau_p = (1-p) [C_i + \sigma_n \cdot \tan \phi_i] + p [C_f + \sigma_n \cdot \tan \phi_f] \quad (\text{F.26})$$

Llamando a C_p y ϕ_p los parámetros de corte promedios de la masa rocosa, se obtiene:

$$\tau_p = C_p + \sigma_n \cdot \tan \phi_p \quad (F.27)$$

Por lo tanto, los valores promedios de la cohesión y ángulo de fricción interna en función de la persistencia se determinan a través de (F.26) como a continuación se indica:

$$C_p = (1-p)C_i + p \cdot C_f \quad (F.28)$$

$$\tan \phi_p = (1-p) \tan \phi_i + p \cdot \tan \phi_f \quad (F.29)$$

Con el objeto de poder apreciar el concepto de persistencia, a continuación, se lleva a cabo un ejemplo siguiendo el procedimiento indicado por Pariseau [5] en su libro Design Analysis in Rock Mechanics.

Medidas de campo en afloramientos graníticos indican que la persistencia de la roca fracturada es $p=0,75$. Por otra parte, a través de las pruebas de laboratorio se ha determinado la resistencia a compresión simple y a tracción de la roca intacta. Siendo, $\sigma_c=105,00\text{MPa}$ y $\sigma_t=-10,50\text{MPa}$.

Adicionalmente, se realizaron ensayos de corte directo, obteniéndose los parámetros resistentes promedios medidos en los planos de discontinuidad, los cuales a continuación se indican:

$$C_f=0,06\text{MPa} \text{ y } \phi_f=25^\circ$$

Utilizando (F.15) y (F.17), los valores de la cohesión y ángulo de fricción interna para la condición intacta son:

$$C_i = \frac{1}{2} \sqrt{|\sigma_c \cdot \sigma_t|} = \frac{1}{2} \sqrt{|105,00 \cdot (-10,50)|}$$

$$C_i = \frac{1}{2} \sqrt{(105,00)^2 / 10} = 16,60 \text{ MPa}$$

$$\operatorname{sen} \phi_i = \left(\frac{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| - 1}{\left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| + 1} \right) = \frac{9}{11} \quad \therefore \phi_i = 54,90^\circ$$

Por lo tanto, los parámetros resistentes promedios o globales de la masa rocosa al emplear las ecuaciones (F.28) y (F.29) son los siguientes:

$$C_p = (1-p)C_i + p \cdot C_f = (1-0,75) \cdot 16,6 + 0,06 = 4,21 \text{ MPa}$$

$$\tan \phi_p = (1-p) \tan \phi_i + p \cdot \tan \phi_f = (1-0,75) \tan 54,90^\circ + 0,75 \cdot \tan 25^\circ$$

$$\phi_p = 35,20^\circ$$

4. REFERENCIAS

1. GOODMAN, R (1980) "Introduction to Rock Mechanics", John Wiley & Sons, 478p
2. ÚCAR, R (2004), "Manual de Anclajes en Ingeniería Civil", U.D Proyectos, E.T.S.I Minas, Universidad Politécnica de Madrid, Editor Carlos López Jimeno, Madrid, 548p
3. BIENIAWSKI, T (1989). "Engineering Rock Mechanics Classifications", John Wiley & Sons, 251p
4. TORRES, R (1992). "Nuevos criterios sobre la resistencia del concreto" Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes ,160p, más anexos
5. PARISEAU, W (2007) "Design Analysis in Rock Mechanics", Taylor & Francis, 560p

APÉNDICE G REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ESFUERZOS

I. INTRODUCCIÓN

El tema que a continuación se describe reviste gran importancia por cuanto la representación geométrica del estado de esfuerzos facilita el estudio de la teoría de la plasticidad, junto con las ventajas y limitaciones de los diferentes criterios de rotura utilizados en suelos, rocas, y el hormigón; permitiendo además interpretar las características geométricas de la traza de la superficie de falla en el plano desviador.

A continuación, se exponen los procedimientos analíticos con dos ejemplos prácticos que serán de gran utilidad para comprender la representación del estado tensional en el espacio de las tensiones principales y en el plano desviador.

Chen y Saleeb [1] mencionan que la alternativa más simple es considerar las coordenadas de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 en un estado tridimensional de esfuerzos. Igualmente señalan que lo ideal sería considerar las seis componentes del tensor de esfuerzos σ_{ij} y representarlos en el espacio; pero esto es una tarea demasiado difícil.

2. GENERALIDADES

Aplicado la metodología de Chen y Saleeb [1] y Chen [2] se ha considerado un estado arbitrario de esfuerzos en un punto conocido de coordenadas σ_1 , σ_2 y σ_3 . Este estado de tensiones está representado por el punto $Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en el espacio cartesiano cuyos ejes son los esfuerzos principales, tal como se indica en la figura (G.1). Lo anterior indica que el sistema de coordenadas cartesianas está representado por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (x, y, z)$ y los correspondientes versores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. También, se observa el eje de tensiones litostáticas¹, el cual está representado por $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$. Este eje se conoce también como diagonal espacial (space diagonal), caracterizándose por formar el mismo ángulo ψ con los tres ejes cartesianos. Por lo tanto, teniendo en cuenta lo previamente indicado se debe cumplir en función de los cosenos directores que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \cos^2 \psi + \cos^2 \psi + \cos^2 \psi = 1 \quad (\text{G.1})$$

Resultando a través de la ecuación (G.1):

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{G.2})$$

A la vez en la referida figura, el vector de esfuerzos $\vec{OQ}$ está definido por:

$$\vec{OQ} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 \quad (\text{G.3})$$

Siendo además el vector unitario ubicado en el eje litostático:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_3 \quad (\text{G.4})$$

El próximo paso, es construir una superficie plana perpendicular al eje litostático. Este plano se denomina plano desviador, conocido también como plano octaédrico o de Haigh-Westergaard.

¹Suppe, J en su libro Principles of Structural Geology (1985), Prentice Hall, 537 p, recomienda emplear el término **litostático** en rocas, en lugar de hidrostático

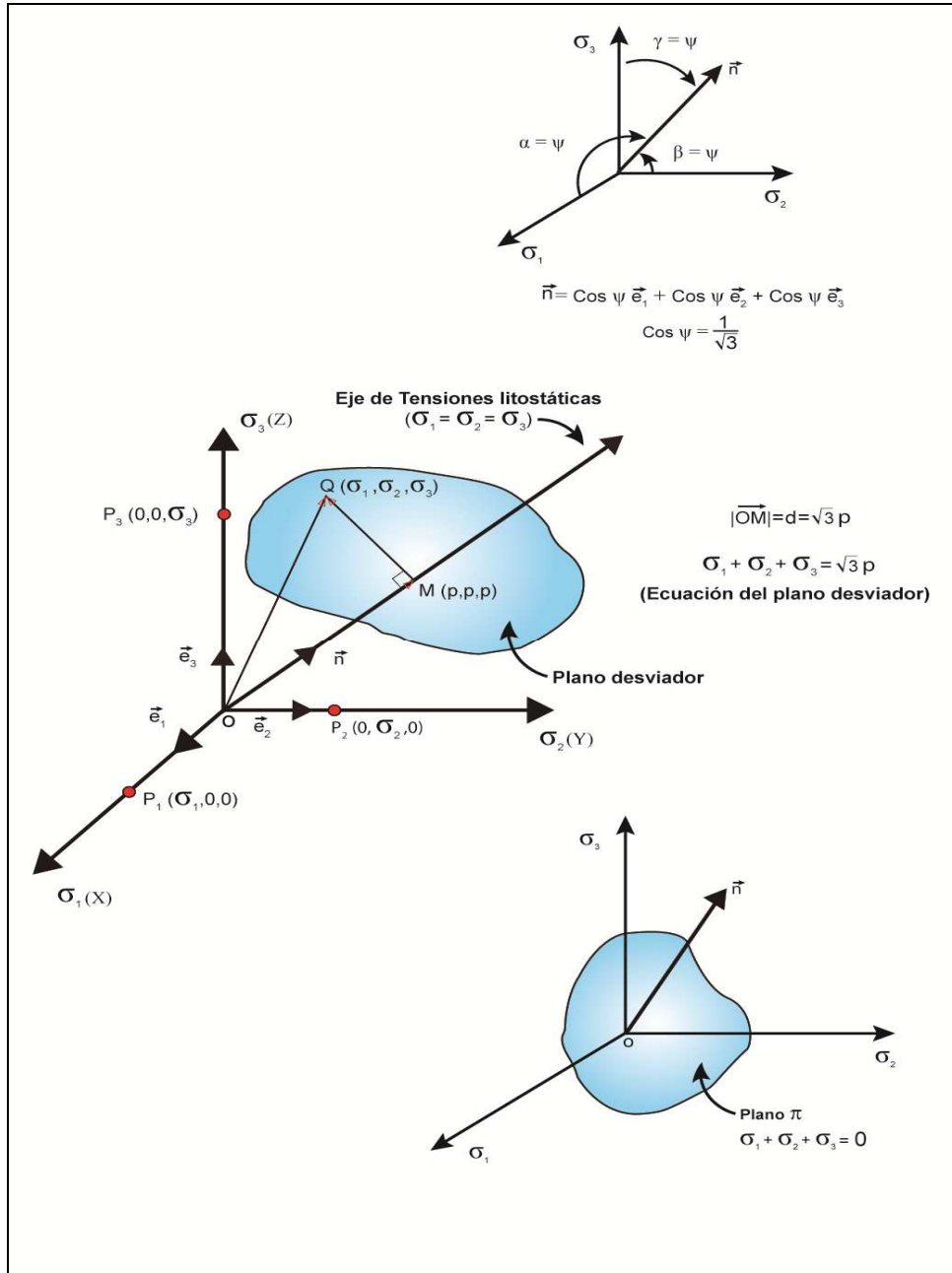


Figura G.1. Espacio de tensiones principales y el plano desviador.

Por otro lado, cabe destacar que al pasar el referido plano por el origen de coordenadas, recibe el nombre de plano π (π).

Observando nuevamente la figura (G.1), el módulo de la tensión normal actuando sobre el plano desviador se obtiene a través del producto escalar:

$$\left. \begin{aligned} d &= |\overrightarrow{OM}| = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = (p \cdot \vec{e}_1 + p \cdot \vec{e}_2 + p \cdot \vec{e}_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ d &= |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{\sqrt{3}} (p + p + p) = \frac{3p}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot p \end{aligned} \right\} \quad (G.5)$$

Como se sabe el tensor de esfuerzos referido a los ejes principales es:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (G.6)$$

Considerando por simplicidad la notación indicial o de Einstein, la tensión normal se determina empleando la ecuación:

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad (G.7)$$

Por cuanto el plano octaédrico, es un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados, resulta que $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$. Por lo tanto, el esfuerzo normal actuando sobre la cara del plano octaédrico al considerar (G.7) se transforma:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \quad (G.8)$$

Al tener en cuenta el eje litostático $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$

A través de la ecuación (G.8) se sabe que:

$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ es la primera invariante del tensor de esfuerzos o invariante lineal y por tanto $p = I_1/3$ representa la tensión normal octaédrica σ_{oct} , denominada también tensión media σ_m .

Por otra parte, es necesario mencionar la importancia de descomponer el tensor de esfuerzos en su parte esférica y desviadora, es decir:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}}^{\sigma_{ij}} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}}^{\text{Tensor esférico}} + \overbrace{\begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_m) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_m) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_m) \end{pmatrix}}^{\text{Tensor desviador} = S_{ij}} \quad (\text{G.9})$$

Que equivale a escribir:

$$\sigma_{ij} = p \cdot \delta_{ij} + S_{ij} = p \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\delta_{ij} = \text{delta de Kronecker}} + S_{ij} \quad (\text{G.10})$$

Como se sabe el tensor esférico origina cambios de volumen, mientras que la componente desviadora del tensor de tensiones, es la responsable de los cambios de forma o distorsión. Además, el tensor esférico y desviador tienen la particularidad que son perpendiculares. Esto se comprueba al realizar el producto escalar siguiente:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{I_1}{3}, \frac{I_1}{3}, \frac{I_1}{3} \right) \left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}, \sigma_2 - \frac{I_1}{3}, \sigma_3 - \frac{I_1}{3} \right) \\ & = \left(\frac{I_1}{3} \right) \overbrace{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}^{I_1} - \left(3 \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{I_1}{3} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.11})$$

A través de la figura (G.2), se conoce que la ecuación general del plano está definida por:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \quad (\text{G.12})$$

Siendo A , B y C las componentes del vector perpendicular al referido plano, es decir:

$$\vec{N} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k} \quad (\text{G.13})$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación general del plano (G.12) por el módulo del referido vector se obtiene:

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) x + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) y + \left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) z + \left(\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = 0 \quad (\text{G.14})$$

Siendo además:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) &= \cos \alpha, \quad \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = \cos \beta \\ \left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) &= \cos \gamma, \quad \left(\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = -d \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.15})$$

Cabe señalar que α , β y γ son los ángulos que el vector $\vec{N}$ forma con los ejes coordenados, y (d) es igual a la distancia entre el origen de coordenadas y el plano. Por lo tanto, teniendo en cuenta (G.14) y (G.15) la ecuación del plano se reduce a la siguiente expresión:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = d \quad (\text{G.16})$$

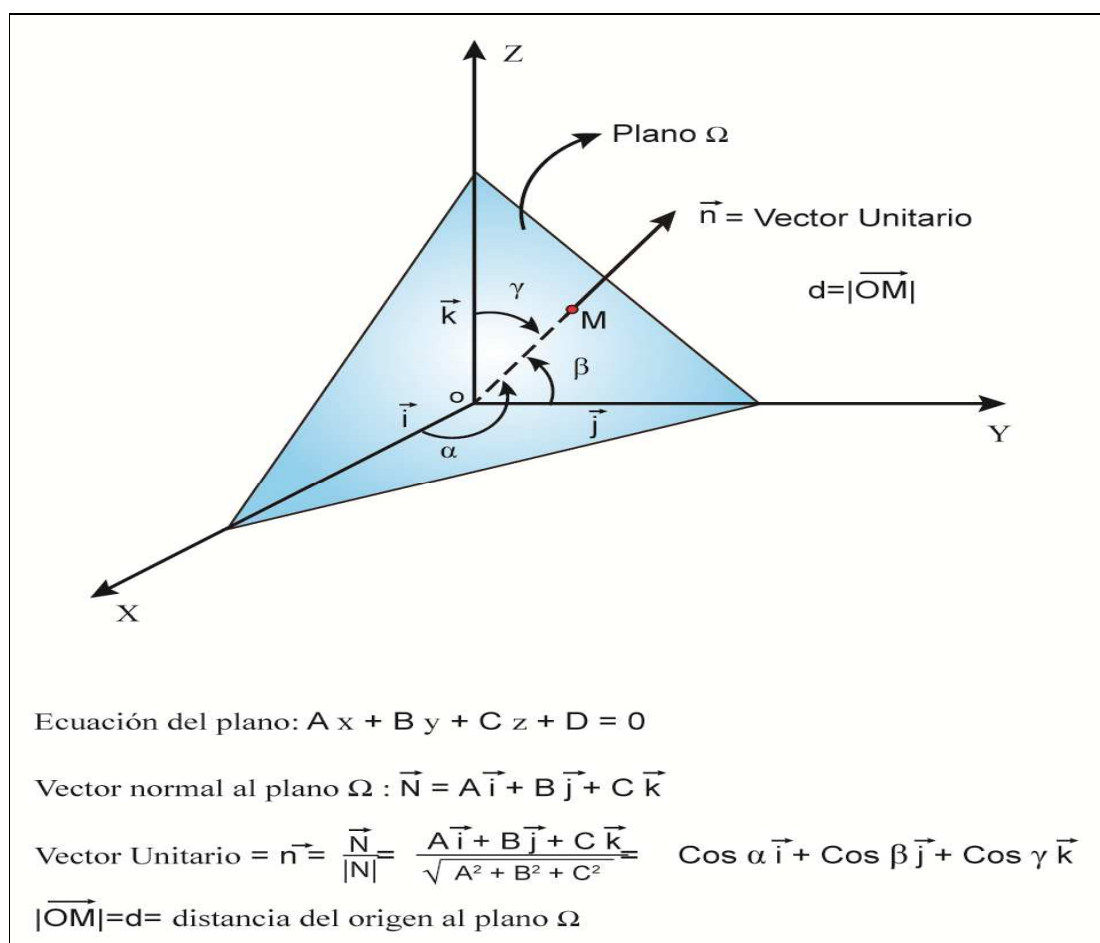


Figura G.2. Ecuación General del plano.

La cual representa la ecuación normal o hessiana del plano. Por otra parte, los coeficientes de x, y, z son los cosenos directores del vector perpendicular al plano. Es decir, son las coordenadas del vector unitario definido por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (G.17)$$

Empleando la nueva notación $x = \sigma_1, y = \sigma_2$ y $z = \sigma_3$, junto con la ecuación (G.5) definida por $d = \sqrt{3} p$; y considerando a la vez que:

$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la ecuación (G.16) se transforma:

$$\sigma_1 \cdot \cos \psi + \sigma_2 \cdot \cos \psi + \sigma_3 \cdot \cos \psi = \sqrt{3}p \quad (\text{G.18})$$

Obteniéndose,

$$x + y + z = 3p \quad (\text{G.19})$$

De acuerdo a Chen y Saleeb [1] un caso particular del plano desviador corresponde cuando pasa por el origen de coordenadas ($d=0$) y se denomina plano $\pi(\text{Pi})$. En estas condiciones, la ecuación anterior se reduce como sigue:

$$\overbrace{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}^{x+y+z} = 0 \quad (\text{G.20})$$

3. PROYECCIÓN DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES SOBRE EL PLANO DESVIADOR

Teniendo en cuenta la figura (G.3) el próximo paso es proyectar las rectas $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ y $\overline{OP_3}$ sobre el plano desviador conociendo las coordenadas de los puntos:

$$O(0,0,0), P_1(\sigma_1, 0, 0), P_2(0, \sigma_2, 0) \text{ y } P_3(0, 0, \sigma_3)$$

- $\overline{MR_1}$ (proyección de $\overline{OP_1}$ sobre el plano desviador)

Previamente, se determinan las distancias considerando el origen de coordenadas y el punto P_1 .

d =distancia del origen de coordenadas al plano desviador $= \sqrt{3} p$ (véase figura G.1).

En realidad lo que se desea es proyectar los ejes $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(y)$ y $z=\sigma_3(z)$ sobre el plano desviador los cuales se representan por σ'_1, σ'_2 y σ'_3 . Por lo tanto, hay

que determinar los puntos pertenecientes al plano desviador que estén más cercanos a los puntos P_1 , P_2 y P_3 .

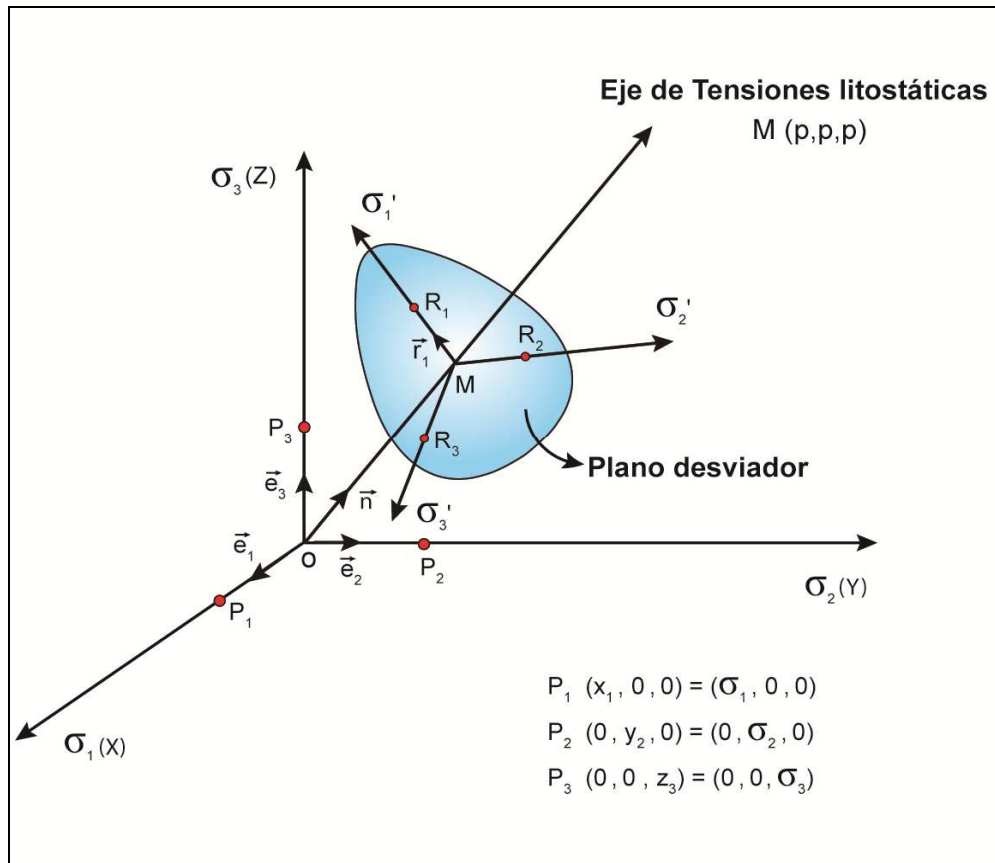


Figura G.3. Proyección de los ejes de las tensiones principales sobre el plano desviador.

Como previamente se ha demostrado el referido plano está representado por la ecuación:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p \longrightarrow (x + y + z = 3p)$$

- Determinación de la proyección ortogonal del punto P_1 sobre el plano desviador. El nuevo punto proyectado se ha identificado como R_1 .

La distancia D del punto $P_1(\sigma_1, 0, 0) = P_1(x_1, 0, 0)$ al punto de coordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (x, y, z)$ está definida por la ecuación:

$$D^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{G.21})$$

Reemplazando z de la ecuación (G.19) en (G.21) resulta:

$$D^2 = f(x, y) = (x - x_1)^2 + y^2 + (3p - x - y)^2 \quad (\text{G.22})$$

El valor de D se minimiza cuando D^2 es también minimizado. En estas condiciones el punto crítico se obtiene considerando:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Rightarrow 2(x - x_1) - 2(3p - x - y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\Rightarrow 2y - 2(3p - x - y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.23})$$

Resultando a través de (G.23)

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= x_1 + 3p \\ x + 2y &= 3p \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.24})$$

Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\frac{2x_1 + 3p}{3} \right) = \left(p + \frac{2}{3}x_1 \right) \\ y &= \left(\frac{3p - x_1}{3} \right) = \left(p - \frac{1}{3}x_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.25})$$

Reemplazando los valores de x, y en (G.19) resulta:

$$z = \left(\frac{3p - x_1}{3} \right) = \left(p - \frac{1}{3}x_1 \right) \quad (\text{G.26})$$

Así, la proyección ortogonal del punto P_1 sobre el plano desviador es:

$$R_1 \left(p + \frac{2}{3} x_1, p - \frac{1}{3} x_1, p - \frac{1}{3} x_1 \right) \quad (G.27)$$

Por supuesto, la proyección ortogonal del punto ubicado en el origen de coordenadas $O (0,0,0)$ sobre el plano desviador es $M (p, p, p)$. Observando la figura (G.3) y conociendo los puntos M y R_1 el vector $\overrightarrow{MR_1}$ se determina a través de ecuación:

$$\overrightarrow{MR_1} = \left(\frac{2x_1}{3} \vec{e}_1 - \frac{x_1}{3} \vec{e}_2 - \frac{x_1}{3} \vec{e}_3 \right) \quad (G.28)$$

Sabiendo que $\sigma_1 = x_1$, se obtiene finalmente:

$$\overrightarrow{MR_1} = \left(\frac{2}{3} \sigma_1 \vec{e}_1 - \frac{1}{3} \sigma_1 \vec{e}_2 - \frac{1}{3} \sigma_1 \vec{e}_3 \right) \quad (G.29)$$

Siendo el vector unitario

$$\vec{r}_1 = \frac{\overrightarrow{MR_1}}{|\overrightarrow{MR_1}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \quad (G.30)$$

Para mayor detalle véase figura (G.3).

- Determinación de la proyección ortogonal del punto P_2 sobre el plano desviador. El nuevo punto proyectado se ha identificado como R_2

La distancia D del punto $P_2(0, \sigma_2, 0) = P_2(0, y_2, 0)$ al punto del plano octaédrico $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (x, y, z)$ está definida por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= (x-0)^2 + (y-y_2)^2 + (z-0)^2 \\ D^2 &= f(x, y) = x^2 + (y-y_2)^2 + (3p-x-y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.31})$$

Derivando,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \Rightarrow 2x + y = 3p \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \Rightarrow x + 2y = y_2 + 3p \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.32})$$

Resultando a través de (G.32)

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 3p \\ x + 2y &= y_2 + 3p \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.33})$$

Al resolver el sistema de ecuaciones y considerando que $x+y+z = 3p$, las coordenadas del punto proyectado R_2 son:

$$R_2 \left(p - \frac{1}{3}y_2, p + \frac{2}{3}y_2, p - \frac{1}{3}y_2 \right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se obtiene que:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MR_2} &= \left(-\frac{1}{3}y_2 \vec{e}_1 + \frac{2}{3}y_2 \vec{e}_2 - \frac{2}{3}y_2 \vec{e}_3 \right) \\ \text{Considerando que } y_2 &= \sigma_2 \\ \overrightarrow{MR_2} &= \left(-\frac{1}{3}\sigma_2 \vec{e}_1 + \frac{2}{3}\sigma_2 \vec{e}_2 - \frac{2}{3}\sigma_2 \vec{e}_3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.34})$$

Siendo el vector unitario:

$$\vec{r}_2 = \frac{\overrightarrow{MR_2}}{|\overrightarrow{MR_2}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \quad (\text{G.35})$$

- $\overrightarrow{NR_3}$ (proyección de $\overrightarrow{OP_3}$ sobre el plano desviador)

Nuevamente, empleando el procedimiento previamente descrito, para el punto R_3 , el vector unitario $\vec{r}_3$ puede expresarse a través de la ecuación:

$$\vec{r}_3 = \frac{\overrightarrow{MR_3}}{|\overrightarrow{MR_3}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \quad (\text{G.36})$$

A través de la figura (G.3), se muestra la proyección de los tres ejes de las tensiones principales sobre el plano desviador.

Por otra parte, debe señalarse que el ángulo que forman entre si los vectores:

$$\vec{r}_1 \text{ y } \vec{r}_2, \vec{r}_1 \text{ y } \vec{r}_3, \text{ y } \vec{r}_2 \text{ con } \vec{r}_3 \text{ es de } 120^\circ \text{ (Véase figura G.4)}$$

Así por ejemplo, al considerar el producto escalar de:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cos \theta = \cos \theta \quad (\text{G.37})$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \right) = \cos \theta \quad (\text{G.38})$$

Resultando que, $\cos \theta = -1/2$ y $\theta = 120^\circ$. Igual ángulo se obtiene al llevar a cabo el producto escalar $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3$ y $\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3$

Resumiendo, de acuerdo a la figura (G.1) el punto Q representa el estado tensional $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de un punto en el espacio de las tensiones principales.

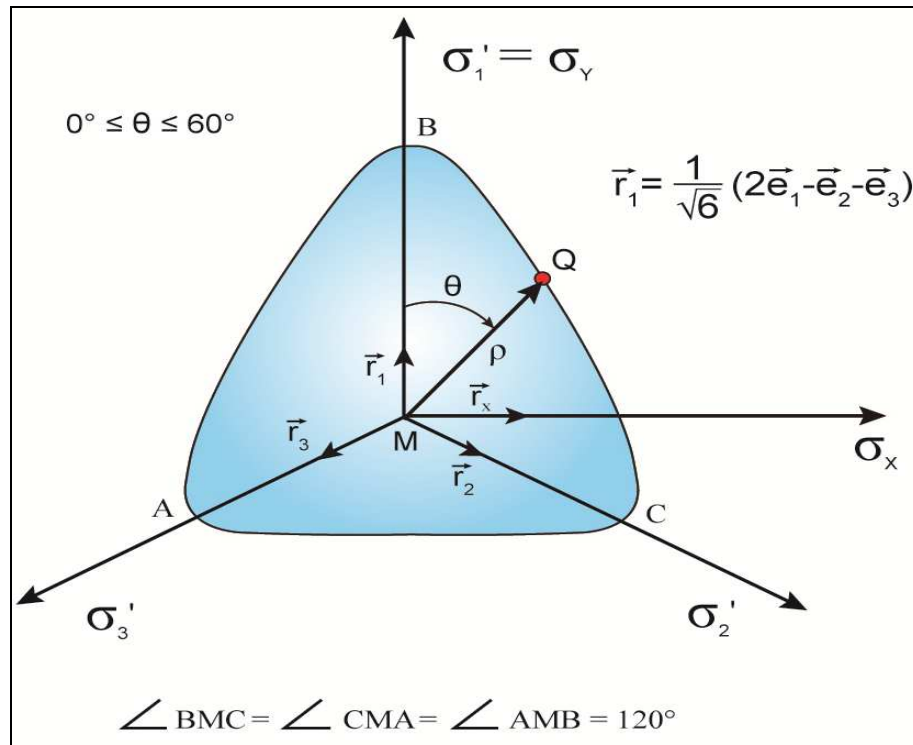


Figura G.4. Plano desviador mostrando los ejes σ'_1 , σ'_2 y σ'_3 , los cuales forman entre sí un ángulo de 120° .

Así, por ejemplo, al considerar el producto escalar de:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cos \theta = \cos \theta \quad (\text{G.37})$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \right) = \cos \theta \quad (\text{G.38})$$

Resultando que, $\cos \theta = -1/2$ y $\theta = 120^\circ$. Igual ángulo se obtiene al llevar a cabo el producto escalar $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3$ y $\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3$

Resumiendo, de acuerdo a la figura (G.1) el punto Q representa el estado tensional $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de un punto en el espacio de las tensiones principales.

Por otra parte, el vector de esfuerzos $\overrightarrow{OQ}$ se descompone en un vector $\overrightarrow{OM}$ a lo largo del eje litostático $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ y el vector $\overrightarrow{MQ}$ actuando tangencialmente en el plano desviador, el cual es perpendicular al eje litostático.

En estas condiciones resulta:

$$|\overrightarrow{OM}| = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cdot n_i = \sigma_1 \cdot n_1 + \sigma_2 \cdot n_2 + \sigma_3 \cdot n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \overbrace{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}^{I_1} \quad (G.39)$$

$$|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} p \quad (G.40)$$

Por otra parte,

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM}$$

Conociendo que $1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p = \sigma_{\text{oct}}$ (esfuerzo octaédrico), se obtiene que:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= |\overrightarrow{OM}| \cdot \vec{n} = \sqrt{3} p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_3 \right) \\ \overrightarrow{OM} &= \overbrace{\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}^p \vec{e}_1 + \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \vec{e}_2 + \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (G.41)$$

$$\overrightarrow{OM} = (p \cdot \vec{e}_1 + p \cdot \vec{e}_2 + p \cdot \vec{e}_3) \quad (G.42)$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{MQ} = (\sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \sigma_3 \cdot \vec{e}_3) - (p \cdot \vec{e}_1 + p \cdot \vec{e}_2 + p \cdot \vec{e}_3) \quad (G.43)$$

$$\overrightarrow{MQ} = [(\sigma_1 - p) \cdot \vec{e}_1 + (\sigma_2 - p) \cdot \vec{e}_2 + (\sigma_3 - p) \cdot \vec{e}_3] \quad (G.44)$$

Utilizando la nomenclatura de los esfuerzos desviadores indicada en la sección (3.2) del apéndice C, la ecuación anterior se transforma:

$$\overrightarrow{MQ} = [s_1 \cdot \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3] = [s_1 \ s_2 \ s_3] \quad (G.45)$$

Siendo el módulo,

$$\left. \begin{aligned} |\overrightarrow{MQ}| &= \rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (\text{ver figura G.4}) \\ |\overrightarrow{MQ}| &= \sqrt{[(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2]} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \tau_{oct} \end{aligned} \right\} \quad (G.46)$$

Cabe destacar, como se ha mencionado previamente que el tensor desviador en función de los esfuerzos principales está definido por:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} (\sigma_1 - p) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - p) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - p) \end{pmatrix} \quad (G.47)$$

Adicionalmente, se observa a través de (G.47) que la primera invariante de esfuerzos del tensor desviador $J_1 = (S_1 + S_2 + S_3) = 0$, resultando:

$$J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) = 0 \quad (G.48)$$

Por otra parte, es necesario definir en el plano desviador un nuevo sistema de coordenadas cartesianas $(\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z)$. El eje $\sigma_Y^{(2)}$ coincide con σ_1 (proyección de σ_1 sobre el plano desviador), σ_Z coincide con el eje litostático, el cual es normal al referido plano, y el eje σ_X se encuentra en el plano desviador y es paralelo al vector unitario $\vec{r}_X$ (véase figura G.4). Dicho vector se obtiene a través del producto vectorial:

$$\vec{r}_X = \vec{r}_1 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_3 \quad (\text{G.49})$$

En este caso, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_X$ y $\vec{n}$ corresponden a los vectores unitarios de los ejes σ_Y , σ_X , y σ_Z respectivamente.

Por lo tanto, si se desea determinar el estado tensional referido al nuevo sistema de coordenadas σ_X , σ_Y , σ_Z , únicamente se requiere conocer los cosenos directores que forman dichos ejes con relación a los ejes primitivos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

En estas condiciones la matriz rotación está definida por:

$$\overline{\overline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{G.50})$$

² No se debe confundir dicho valor con el punto cedente

$$(\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z) = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{G.51})$$

$$\overline{\overline{R}}^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \text{Transpuesta de la matriz rotación} \quad (\text{G.52})$$

Por otra parte, se conoce que:

$$(\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z) \overline{\overline{R}} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) \overline{\overline{R}} \overline{\overline{R}}^T \therefore \overline{\overline{R}} \overline{\overline{R}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.53})$$

Siendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Matriz identidad} \quad (\text{G.54})$$

Obteniéndose finalmente:

$$(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) = (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{G.55})$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{2 \cdot \sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_2 &= -\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_3 &= \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}
 \tag{G.56}$$

A la vez por simplicidad, la tabla anexa contiene los coeficientes de transformación entre los dos conjuntos de ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$

Tabla (G.1).

	σ_1	σ_2	σ_3	Tensiones
σ_X	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sigma_2 + \sigma_3)$
σ_Y	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$
σ_Z	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

4. DETERMINACIÓN DEL ÁNGULO LODE θ

Como previamente se ha indicado a través de la ecuación (C.122) del apéndice C se sabe que:

$$\left. \begin{aligned}
 J_2 &= \frac{\rho^2}{2} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2] \\
 \rho &= \sqrt{2 \cdot J_2} \quad , \quad \rho = |\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{G.57}$$

Por otra parte, de acuerdo a la figura (G.4) y considerando las ecuaciones (G.30) y (G.45) y recordando además que $J_1=s_1+s_2+s_3=0$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{r}_1 &= \left[s_1 \cdot \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3 \right] \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 - 1 \cdot \vec{e}_3 \right)}^{\vec{r}_1} = \rho \cos \theta \\ \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{r}_1 &= |\overrightarrow{MQ}| \cdot |\vec{r}_1| \cos \theta = \rho \cos \theta \quad , \quad 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \\ \cos \theta &= \frac{(2s_1 - s_2 - s_3)}{\sqrt{6} \cdot \rho} = \frac{(2s_1 - s_2 - s_3)}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{J_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \end{aligned} \right\} \quad (G.58)$$

A la vez, teniendo en cuenta que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, la ecuación anterior se transforma:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} \left(s_1^3 - s_1 J_2 \right) \quad (G.59)$$

Nuevamente, a través del apéndice (C) se conoce que la segunda invariante de la tensión desviadora $J_2 = - (s_1 \cdot s_2 + s_2 \cdot s_3 + s_3 \cdot s_1)$. Al reemplazar dicho valor en (G.59) resulta:

$$\left. \begin{aligned} \cos 3\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} \left(s_1^3 - s_1 (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) \right) \\ \cos 3\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} \left(s_1^2 \overbrace{(s_1 + s_2 + s_3)}^{J_1=0} + \overbrace{s_1 s_2 s_3}^{J_3} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} J_3 \end{aligned} \right\} \quad (G.60)$$

Al considerar la última ecuación indicada en (G.58):

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2s_1 - s_2 - s_3)}{\sqrt{6} \cdot \rho} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \rho} \left(3s_1 - \overbrace{(s_1 + s_2 + s_3)}^{J_1=0} \right) \\ \rho \cos \theta &= s_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (G.61)$$

Si el esfuerzo principal mayor se encuentra en el eje σ_3 , resulta, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{r}_3 &= [s_1 \cdot \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3] \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)}^{\vec{r}_3} = \rho \cos \theta \\ \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{r}_3 &= |\overrightarrow{MQ}| \cdot |\vec{r}_3| \cos \theta = \rho \cos \theta \quad , \quad 0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \\ \rho \cos \theta &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot s_3 \end{aligned} \right\} \quad (G.62)$$

Finalmente, considerando el caso en el cual el esfuerzo principal mayor es σ_2 , al llevar a cabo el procedimiento previamente descrito se obtiene:

$\rho \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot s_2$. Otra forma de apreciar la relación de ρ, θ y las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 es la siguiente, teniendo en cuenta la figura G.4 y la tabla G.1.

$$\rho \cos \theta = \sigma_Y \Rightarrow \rho \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3) \quad (G.63)$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_Y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{q \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} \right) \quad (G.64)$$

Siendo,

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{G.65})$$

Es decir,

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \right) \\ \text{Resultando:} \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.66})$$

Por cuanto la segunda invariante de la tensión desviadora es:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (\text{G.67})$$

Se obtiene por tanto que $\rho = (2J_2)^{1/2}$

Cabe destacar que la referida invariante J_2 puede también expresarse como:

$$J_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right] \quad (\text{G.68})$$

Por lo tanto, la segunda invariante desviadora puede interpretarse como dos veces el valor medio del cuadrado los esfuerzos cortantes principales.

Otro aspecto a resaltar corresponde a la ecuación (G.57), la cual puede escribirse en la forma:

$$J_2 = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \right] = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2 \right] \right\} \quad (\text{G.69})$$

A través de dicha expresión se observa que J_2 también puede interpretarse como $3/2$ del valor medio del cuadrado de las tensiones principales desviadoras.

Adicionalmente, a través de la figura (G.4) se observa que:

$$\tan \theta = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3} \right) \quad (G.70)$$

Con dicha expresión es posible considerar las siguientes condiciones:

Si $\sigma_1 = \sigma_c$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, se obtiene que $\theta = 0^\circ$ y la longitud desviadora $\rho_{\theta=0}$ corresponde al caso de compresión simple.

Si $\sigma_3 = \sigma_t$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, se obtiene que $\theta = -60^\circ$ y la longitud desviadora $\rho_{\theta=60}$ corresponde a tracción uniaxial.

Si $\theta = 30^\circ \longrightarrow \sigma_1 = (2\sigma_3 - \sigma_2)$. Teniendo en cuenta un estado de tensión plana ($\sigma_3 = 0$), se obtiene el caso de corte puro, es decir $(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$. También se logra un estado de corte puro considerando que: $\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo Número 1

El estado de esfuerzos principales en tres diferentes puntos del material investigado tiene los siguientes valores:

A $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (8, 1, 3)$, $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$

B $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1, 3, 8)$, $(\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1)$

C $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (3, 8, 1)$, $(\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3)$

Graficar el estado de esfuerzos en el espacio de las tensiones principales y en el plano desviador. De acuerdo a la figura (G.5) los puntos A, B y C

representan el estado de tensiones para las diferentes condiciones de σ_1 , σ_2 y σ_3 en el espacio de las tensiones principales.

Por otra parte, los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, pueden descomponerse en una parte litostática y otra desviadora, como a continuación se indica:

- Primer estado de tensiones: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (8, 1, 3)$, $(\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2)$

$$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (8 + 1 + 3) = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = p = \frac{I_1}{3} = 4 \text{ MPa}$$

$$\overrightarrow{OA} = \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \sigma_3 \cdot \vec{e}_3 = 8 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{OD} = p \cdot \vec{e}_1 + p \cdot \vec{e}_2 + p \cdot \vec{e}_3 = 4 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) = 4 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2 - 1 \cdot \vec{e}_3$$

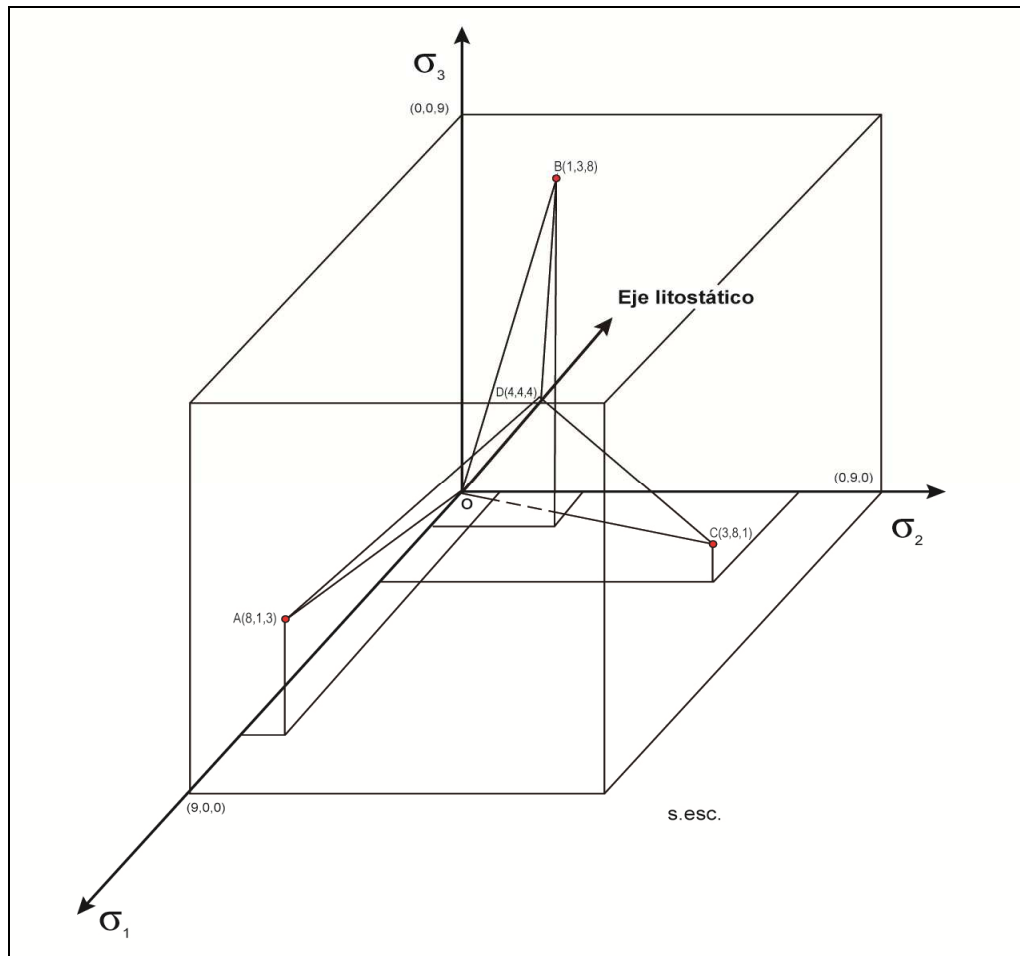


Figura G.5. Representación del espacio de tensiones principales.

- Segundo estado de tensiones: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1, 3, 8)$, $(\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1)$.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (1 + 3 + 8) = 12 \text{ MPa} \\
 \sigma_m &= \sigma_{oct} = p = \frac{I_1}{3} = 4 \\
 \overrightarrow{OB} &= \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \sigma_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 8 \cdot \vec{e}_3 \\
 \overrightarrow{OD} &= p \cdot \vec{e}_1 + p \cdot \vec{e}_2 + p \cdot \vec{e}_3 = 4 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3 \\
 \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3 \\
 \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = -3 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

- Tercer estado de tensiones: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (3, 8, 1)$, $(\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3)$

Siguiendo el mismo procedimiento, resulta:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (3 + 8 + 1) = 12 \text{ MPa} \\
 \sigma_m &= \sigma_{oct} = p = \frac{I_1}{3} = 4 \\
 \overrightarrow{OC} &= \sigma_1 \cdot \vec{e}_1 + \sigma_2 \cdot \vec{e}_2 + \sigma_3 \cdot \vec{e}_3 = 3 \cdot \vec{e}_1 + 8 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\
 \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \cdot \vec{e}_2 + s_3 \cdot \vec{e}_3 \\
 \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = -1 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 - 3 \cdot \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

Al utilizar la última ecuación indicada en (G.61):

$$s_1 = 4, \rho = \sqrt{26}$$

$$\cos \theta = \frac{s_1}{\rho} \sqrt{3/2} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} \right) = 16,10^\circ$$

Dicho ángulo conocido como el ángulo de Lode, se mide en dirección de las agujas del reloj a partir del esfuerzo principal mayor. Igual ángulo se obtiene empleando las ecuaciones (G.62) y (G.63)

En general, la forma más usual de obtener θ es a través de la ecuación (G.60), es decir:

$$J_2 = \frac{\rho^2}{2} = 13, J_3 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 = 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 12$$

$$\cos 3\theta = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} \right) J_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{12}{(13)^{3/2}} \Rightarrow \theta = 16,10^\circ$$

Finalmente, la figura anexa muestra la representación gráfica del estado de esfuerzos en el plano desviador

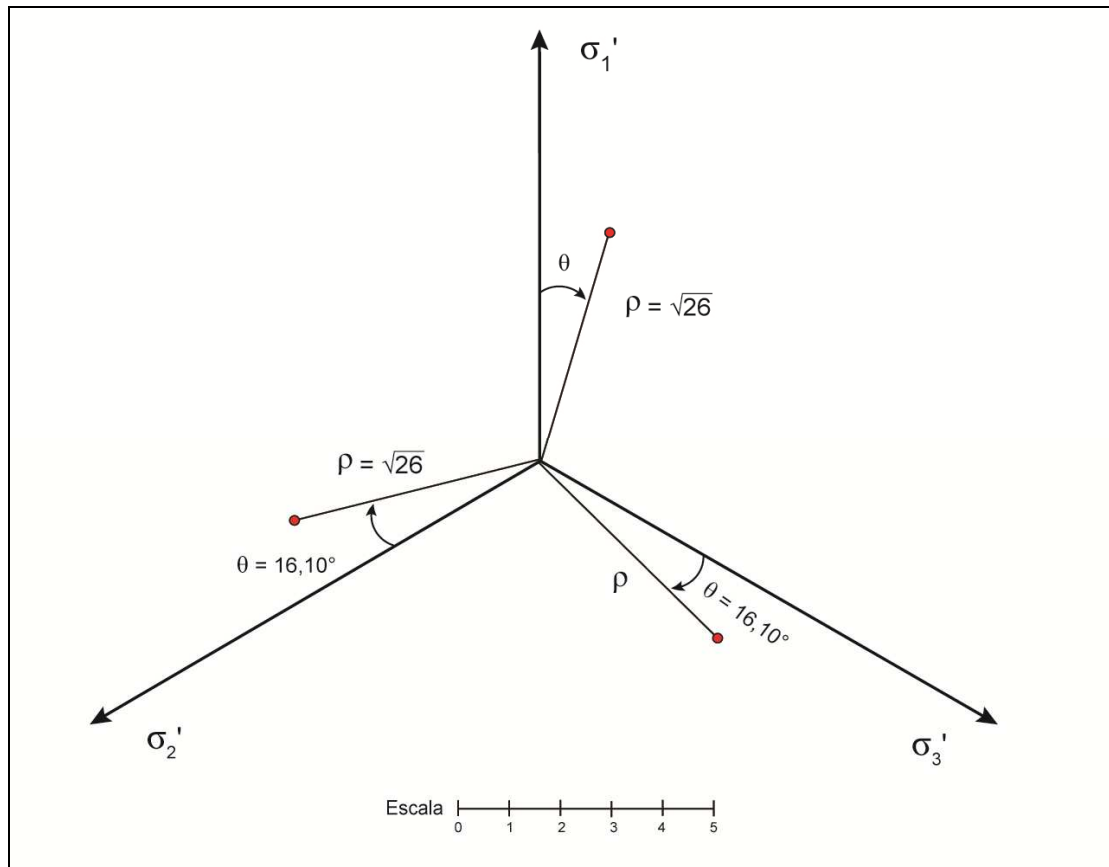


Figura G.6. Valores de la longitud desviadora ρ y el ángulo Lode θ .

Ejemplo N° 2

A través de las pruebas de compresión sin confinar se han determinado los siguientes valores medios en una roca caliza.

- Resistencia a compresión simple $\sigma_c = 48,00$ MPa
- Ángulo de rotura $\alpha = (45^\circ + \phi/2) = 64^\circ$
- Ángulo de fricción interna $\phi = 38^\circ$

Se desea determinar para el estado de tensiones $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_c, 0, 0)$, la traza de la superficie de falla en el plano desviador considerando los siguientes criterios de rotura.

- Tresca
- von Mises
- Mohr-Coulomb
- Drucker- Prager

e) Hoek y Brown f) Úcar

Previamente, se determinan los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (\sigma_c, 0, 0) = (48, 0, 0) \\
 \sigma_{oct} = p = \sigma_m &= \frac{I_1}{3} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) = \frac{48,00}{3} MPa = 16,00 MPa \\
 (s_1, s_2, s_3) &= ((\sigma_1 - p), (\sigma_2 - p), (\sigma_3 - p)) = (32, -16, -16) \\
 \rho &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_c = 39,20 MPa \\
 J_2 &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1}{3} \sigma_c^2 \\
 J_3 &= (s_1 \cdot s_2 \cdot s_3) = \frac{2}{27} \sigma_c^3
 \end{aligned}$$

Al aplicar (G.60):

$$\cos 3\theta = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{3/2}} \right) J_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\frac{2}{27} \sigma_c^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} \sigma_c^2 \right)^3}} \right] = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

Igual valor de θ se obtiene al considerar la ecuación (G.70) y (G.61)

Adicionalmente, se observa que J_2 y J_3 son constantes para los tres estados de tensión.

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_c, 0, 0)$, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, \sigma_c, 0)$ y $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, \sigma_c)$

Por lo tanto el ángulo de Lode θ , es el mismo. Además al ser $\theta = 0^\circ$ el valor de ρ coincide con los ejes σ'_1 , σ'_2 y σ'_3

Cabe destacar, que dependiendo del estado de tensiones los ejes principales pueden ser intercambiados para definir la proyección del eje principal mayor sobre el plano desviador.

Por lo tanto, cuando:

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_c, 0, 0) \rightarrow \sigma'_1$ es el eje principal mayor ubicado sobre el plano desviador

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, \sigma_c, 0) \rightarrow \sigma'_2$ es el eje principal mayor ubicado sobre el plano desviador

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, \sigma_c) \rightarrow \sigma'_3$ es el eje principal mayor ubicado sobre el plano desviador

• Criterio de Tresca

Teniendo en cuenta que $\sigma_1 = \sigma_c = 48,00 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = 0$, junto con la ecuación (C.156), se obtiene:

$$f(\rho, \theta) = \rho \cdot \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{2} k = 0$$

Siendo además,

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = k \Rightarrow k = 24,00 \text{ MPa}$$

$$\rho_{\theta=0} = \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 24,00 \text{ MPa}}{\sin 60^\circ} = 39,20 \text{ MPa}$$

Para $\theta = 60^\circ$

$$\rho_{\theta=60} = \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 24,00 \text{ MPa}}{\sin 120^\circ} = 39,20 \text{ MPa}$$

Como se aprecia el criterio de Tresca establece que la rotura del material comienza cuando la máxima tensión cortante alcanza un valor k , por tanto:

$$\max\left[\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|\right] = k$$

La constante es determinada por un simple ensayo de tracción en materiales dúctiles o de compresión sin confinar en materiales frágiles. Dicho criterio predice el mismo esfuerzo a la falla tanto a tracción como a compresión. Sin embargo, debe indicarse que las pruebas experimentales en rocas y en el hormigón se caracterizan por tener una resistencia a tracción más pequeña que a compresión.

El criterio es utilizado en materiales metálicos, donde se ha comprobado experimentalmente que el fenómeno de plastificación es independiente de la primera invariante de tensiones I_1 o σ_{oct}

Continuando con el referido ejemplo, y teniendo en cuenta además que $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$, $k = (\sigma_c / 2) = 24,00$ MPa, al aplicar la primera ecuación de (G.56) resulta:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot \sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \right) = 24 \text{ MPa}$$

Siendo,

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_c}{3} = \frac{48}{3} = 16,00 \text{ MPa}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{3} p = \sqrt{3} \left(\frac{\sigma_c}{3} \right)$$

Por lo tanto,

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_c = 39,20 \text{ MPa}$$

De dicho resultado se aprecia que el criterio de Tresca en el plano desviador está representado por la ecuación de la recta $\sigma_Y = (\sqrt{2}/3)\sigma_c$ en los seis segmentos, los cuales forman entre sí 60° . Por otra parte, de acuerdo a la figura (G.7) se observa que la traza de la superficie de falla en el plano desviador es simétrica con respecto a la línea AA'. Igual argumento corresponde con las líneas BB' y CC'. Estos ejes de simetría dividen el plano desviador en seis segmentos de 60° . De lo anterior se deduce que el criterio de Tresca está definido por seis lados iguales con valores de $\sigma_Y = (\sqrt{2}/3)\sigma_c = \rho_{\theta=0} = \rho_{\theta=60}$, que representan un hexágono regular (véase figura G.7)

Como se sabe dicho criterio fue desarrollado originalmente para metales y no es recomendable su aplicación en problemas de análisis de estabilidad en suelos. Únicamente puede ser utilizado en los casos de suelos saturados mediante pruebas de resistencia al corte en la condición sin drenar, en la cual $\phi_u = 0^\circ$ y el valor de $k = 1/2(\sigma_1 - \sigma_3) = C_u$. Lo anterior indica que dicho ensayo se realiza en función de los esfuerzos totales y por tanto los parámetros de corte obtenidos tienen su aplicación en el análisis de estabilidad a corto plazo en suelos arcillosos, en donde se considera que el tiempo transcurrido hasta el final de la construcción de la obra es pequeño para que ocurra la disipación del exceso de la presión intersticial. Si la muestra está saturada la presión de poros toma el incremento de la presión de cámara sin modificar el esfuerzo efectivo de la muestra, y por lo tanto sin modificación de la resistencia al corte. Es decir, el esfuerzo desviador requerido para que falle es independiente de la presión de cámara en la cual se realiza el ensayo. Por lo tanto, la envolvente de rotura es horizontal con $\phi_u = 0^\circ$.

Finalmente, al no ser la superficie de falla suave las esquinas del hexágono dificultan el análisis numérico al aplicar dicho criterio.

• Criterio de von Mises

Empleando la ecuación (C.159) dicho criterio en función de los esfuerzos principales puede expresarse como sigue:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (\text{G.64})$$

Al reemplazar (G.56) en la ecuación anterior, se transforma:

$$\left(\frac{3\sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{2\sigma_X}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} - 3\frac{\sigma_Y}{\sqrt{6}} \right)^2 = 6k^2 \quad (\text{G.65})$$

Al simplificar se obtiene el conocido círculo de fluencia de von Mises.

A través de simples operaciones algebraicas la ecuación (G.65) está representada por la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = \sqrt{2} k$. Por otra parte al considerar que $\sigma_1 = \sigma_c$, $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 = 0$ la ecuación (G.64) se reduce a $\sigma_c = \sqrt{3}k$.

En estas condiciones, se obtiene finalmente: $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \frac{2}{3}\sigma_c^2$

Al igual que el criterio de Tresca, puede emplearse en la estabilidad de suelos en la condición no drenada, es decir la resistencia al corte se obtiene en función de los esfuerzos totales. Otra característica es su independencia de la primera invariante de tensiones I_1 , por lo tanto, la plastificación es independiente de la componente esférica $I_1/3$ (tensión octaédrica).

Cabe destacar que el criterio de von Mises se ha establecido en la actualidad como uno de los criterios de plastificación más utilizados en metales. En el espacio de las tensiones principales se comprueba que se trata de un cilindro con el mismo eje que el de Tresca, pero de sección circular, tal como se muestra en la figura (G.8).

La figura (G.7) muestra la superficie de falla en el plano desviador empleando los datos del ejemplo anterior.

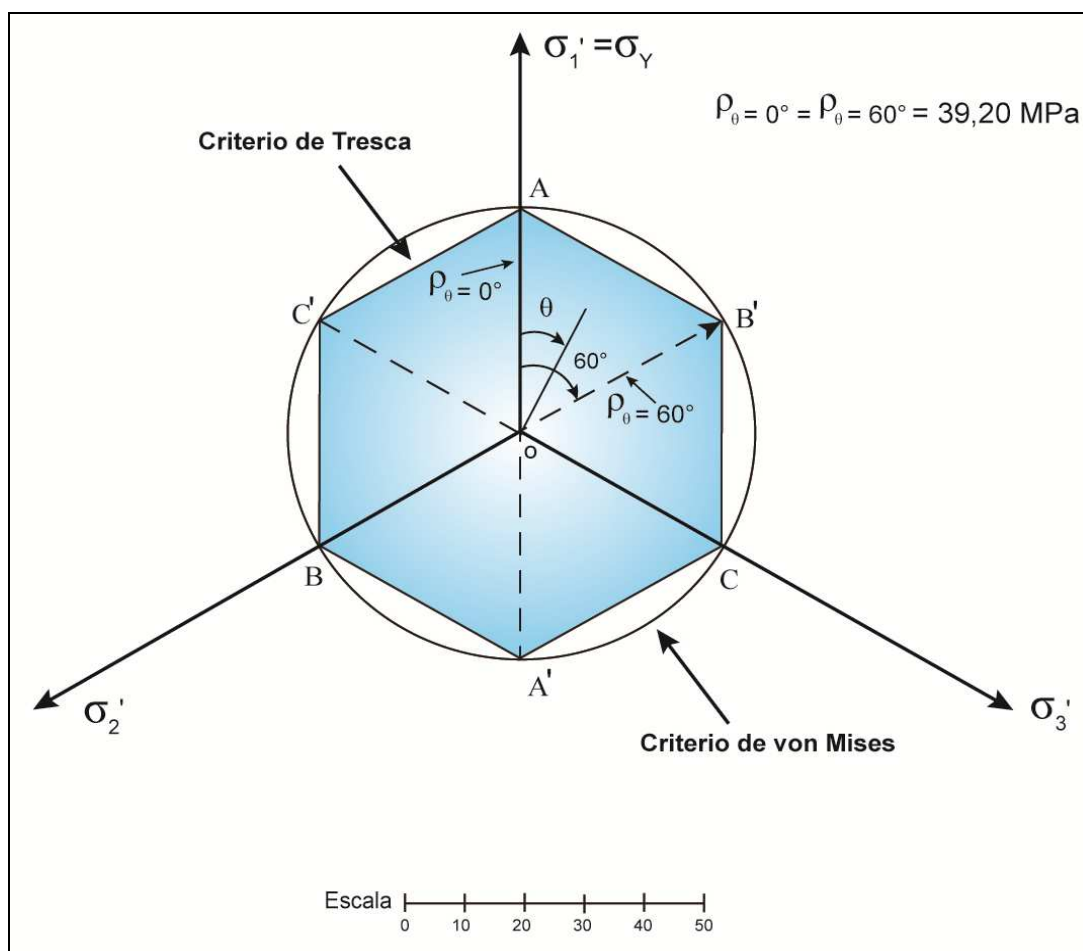


Figura G.7. Traza de la superficie de falla mostrando el criterio de Tresca y von Mises

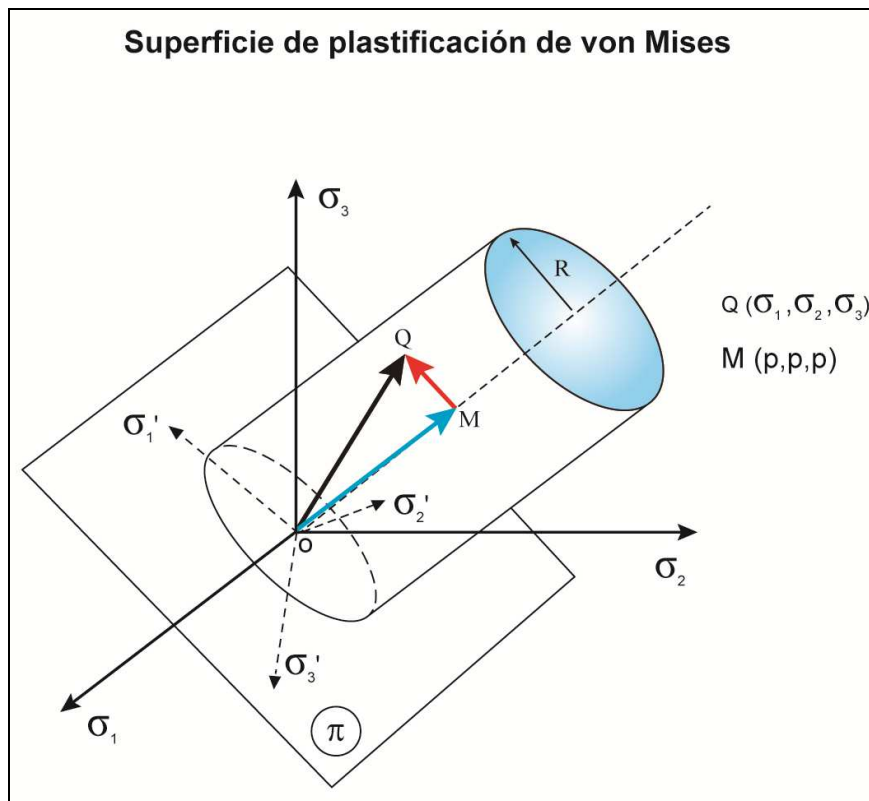


Figura G.8. Trazo de la superficie circular de von Mises en el plano desviador.

• Criterio de Mohr - Coulomb

Previamente, a través del apéndice C se ha mencionado que la ecuación lineal de Mohr-Coulomb en el espacio de las tensiones principales está representada por una pirámide cuya sección es un hexágono irregular.

Por otra parte, sólo se requiere conocer en el espacio Haigh -Westergaad los valores de $\rho_{\theta=0^\circ}$ y $\rho_{\theta=60^\circ}$ para representar gráficamente el hexágono. Lo previamente indicado se apreciará en las páginas siguientes.

En dicho criterio se considera que el esfuerzo principal intermedio σ_2 no tiene influencia en la rotura del material, lo cual es contrario a los resultados experimentales. También cabe destacar que las esquinas del hexágono dificultan el análisis a través de procedimientos numéricos. Sin embargo, el modelo de rotura es ampliamente usado dando resultados confiables en

variedad de problemas geotécnicos y dentro de un limitado intervalo de la presión de confinamiento.

El criterio es ampliamente utilizado en materiales geológicos, que por sus características y propiedades geo- mecánicas difiere notablemente al de los metales cuyo modelo matemático depende solamente de un parámetro como Tresca y von Mises; siendo estos dos últimos en mencionar independientes de la primera invariante de tensiones I_1 . Adicionalmente cabe señalar que el verdadero comportamiento de las rocas es más complicado y requiere de parámetros adicionales obtenidos mediante las pruebas de corte directo y triaxiales, y en donde I_1 ($\sigma_{oct} = I_1/3$) tiene una influencia importante en la resistencia de suelos, rocas y el hormigón.

Como es bien conocido, al aplicar el referido criterio los parámetros a determinar son la cohesión C y el ángulo de fricción interna ϕ .

También en este modelo lineal se observa que la tensión tangencial de plastificación es proporcional a la tensión normal, como resultado de la fricción interna que existe entre las partículas.

Por otra parte, Davis y Selvadurai [3] mencionan que existen modificaciones al criterio de rotura de Mohr- Coulomb.

Una de ellas corresponde a Lade y Duncan [4] en el año 1975. El criterio propuesto está representado por la ecuación:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \kappa \cdot \sigma_{oct}^3 = \kappa p^3 \quad (G.66)$$

Se aplica a suelos granulares ($C=0$), siendo la constante $\kappa = f(\phi)$.

$$\kappa = 1 - \frac{12 \cdot \sin^2 \phi}{(3 - \sin \phi)} + \frac{16 \cdot \sin^3 \phi}{(3 - \sin \phi)^3} \quad (G.67)$$

La otra modificación según Davis y Selvadurai [3] se fundamenta en los investigadores H. Matsuoka y T. Nakai, siendo el criterio de rotura:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \psi \cdot p (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \quad (G.68)$$

La constante ψ se determina al coincidir el lugar geométrico de la superficie de rotura con el hexágono de Mohr-Coulomb, obteniéndose:

$$\psi = \left[\frac{3(1 - \sin \phi - \sin^2 \phi + \sin^3 \phi)}{9 - 9\sin \phi - \sin^2 \phi + \sin^3 \phi} \right] \quad (G.69)$$

Tanto el criterio de Lade y Duncan como el de Matsuoka y Nakai han demostrado buenos resultados al compararse con las pruebas triaxiales.

Al considerar nuevamente la relación lineal entre las tensiones principales se sabe que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \phi/2) + 2C \cdot \tan(45^\circ + \phi/2) \\ N\phi &= \left(\frac{(1 + \sin \phi)}{(1 - \sin \phi)} \right) \quad , \quad N\phi^{1/2} = \left(\frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (G.70)$$

Siendo la resistencia a compresión simple

$$\sigma_c = 2C \cdot \tan(45^\circ + \phi/2) \quad (G.71)$$

En el caso estudiado, se sabe que: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_c, 0, 0)$. Por lo tanto, al reemplazar la primera y última ecuación de (G.56) en (G.70) resulta:

$$\left(\frac{2 \cdot \sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \right) \tan^2(45^\circ + \phi/2) + 2C \cdot \tan(45^\circ + \phi/2) \quad (G.72)$$

Siendo, además,

$$\sigma_Z = \sqrt{3}p = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_c \quad (G.73)$$

Cabe indicar que el valor de σ_z es constante, observándose además que el tamaño de la superficie de falla depende de la magnitud de (p)

Una vez realizadas las simplificaciones, la ecuación (G.72) se transforma:

$$\sigma_Y = \left[\sqrt{3} \left(\frac{1 + \sin \phi}{3 - \sin \phi} \right) \right] \sigma_X + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_c \quad (G.74)$$

Cuando $\sigma_X = 0$, la ordenada en el origen es: $\sigma_Y = (2/3)^{1/2} \cdot \sigma_c = 39,20$ MPa
Igual valor se obtiene aplicando (C.166), considerando además que:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_c$$

Por lo tanto,

$$\rho = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_c (3 - \sin \phi)}{3(1 + \sin \phi) \sin \theta + \sqrt{3}(3 - \sin \phi) \cos \theta} \quad (G.75)$$

Adicionalmente, para $\theta = 0^\circ$, $\phi = 38^\circ$ y $\sigma_c = 48,00$ MPa resulta:

$$\rho_{\theta=0^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot 48,00}{\sqrt{3}} = 39,20 \text{ MPa}$$

Se observa que el valor obtenido corresponde al intervalo de tensiones ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$). Adicionalmente el ángulo de Lode se encuentra comprendido en el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$.

Al ser σ_1 el esfuerzo principal mayor, el referido ángulo se mide a partir del eje σ'_1 en el sentido de las agujas del reloj. Igualmente, al considerar los estados de tensiones ($\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$) y ($\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$), el ángulo θ se mide a partir de σ'_3 y σ'_2 respectivamente.

Teniendo en cuenta que $\theta = 60^\circ$ resulta:

$$\rho_{\theta=60^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot 48,00 \text{MPa} (3 - \sin 38^\circ)}{3(1 + \sin 38^\circ) \sin 60^\circ + \sqrt{3} (3 - \sin 38^\circ) \cos 60^\circ} \approx 26 \text{MPa}$$

Si en la ecuación (C.166), $\xi=0$, indica que el plano desviador pasa por el origen (*Plano π*). En estas condiciones es posible escribir:

$$\rho = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sigma_c (1 - \sin \phi)}{3(1 + \sin \phi) \sin \theta + \sqrt{3} (3 - \sin \phi) \cos \theta} \quad (\text{G.76})$$

El valor correspondiente a $\theta=60^\circ$ puede obtenerse para el caso en el cual $\sigma_3 = \sigma_2 \geq \sigma_1$. Por lo tanto, la ecuación (G.70) se transforma:

$$\sigma_3 = \sigma_1 \overbrace{\tan^2 \left(45^\circ + \phi/2 \right)}^{\left(\frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} \right)} + 2C \cdot \overbrace{\tan(45^\circ + \phi/2)}^{\sigma_c} \quad (\text{G.77})$$

Al reemplazar σ_3 y σ_1 indicados en (G.56) en la ecuación anterior, resulta:

$$\overbrace{\left(\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \right)}^{\sigma_3} = \overbrace{\left(\frac{2 \cdot \sigma_Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_Z}{\sqrt{3}} \right)}^{\sigma_1} \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) + \sigma_c \quad (\text{G.78})$$

A la vez se conoce que:

$$\sigma_Z = \sqrt{3} \cdot p = \sqrt{3} \cdot \overbrace{\left(\frac{I_1}{3} \right)}^{\xi} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sigma_c}{3} \quad (\text{G.79})$$

Mediante simplificaciones algebraicas la ecuación lineal indicada en (G.79) se transforma en la siguiente expresión:

$$\sigma_Y = \left[\sqrt{3} \left(\frac{1 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \right) \right] \sigma_X - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_c \left(\frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \right) \quad (\text{G.80})$$

Siendo la ordenada en el origen:

$$\sigma_Y = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_c \left(\frac{3 - \sin \phi}{3 + \sin \phi} \right) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 48,00 \left(\frac{3 - \sin 38^\circ}{3 + \sin 38^\circ} \right) \approx -26 \text{ MPa}$$

Dicho valor corresponde al vértice inferior del hexágono irregular cuando $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$ y representa en el ensayo triaxial, el caso particular en el cual el esfuerzo axial es reducido en lugar de incrementarse como ocurre generalmente. El ensayo, aunque es poco frecuente es usado también para medir la resistencia de la roca, en particular al considerar esfuerzos efectivos bajos. En resumen, el valor de la longitud desviadora $\rho = 39,20 \text{ MPa}$ ($\theta = 0^\circ$) se ubica en los tres ejes principales correspondientes a $\sigma'_1 = \sigma_Y = \sigma'_3 = \sigma'_2$.

Por otra parte, $\rho = 26 \text{ MPa}$ ($\theta = 60^\circ$) representa la longitud en los otros tres segmentos que forman 60° con los respectivos ejes principales σ'_1 , σ'_2 y σ'_3 en el plano desviador. Finalmente, si se considera el plano desviador pasando por el origen de coordenadas (plano π), es decir $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, al aplicar (G.76) las longitudes desviadoras $\rho_{\theta=0}$ y $\rho_{\theta=60}$ están representadas por las ecuaciones:

$$\rho_{\theta=0^\circ} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_c (1 - \sin \phi)}{(3 - \sin \phi)}, \quad \rho_{\theta=60^\circ} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sigma_c (1 - \sin \phi)}{(3 + \sin \phi)} \quad (\text{G.81})$$

Siendo la relación,

$$\left(\frac{\rho_{\theta=0^\circ}}{\rho_{\theta=60^\circ}} \right) = \left(\frac{3 + \sin \phi}{3 - \sin \phi} \right) \quad (\text{G.82})$$

Resumiendo, a través de las páginas precedentes se ha podido apreciar las ventajas de utilizar las coordenadas ξ y ρ , las cuales definen las longitudes correspondientes a la parte hidrostática (litostática en el caso de materiales geológicos) y desviadora respectivamente.

Sin lugar a dudas es más conveniente expresar los diferentes criterios de rotura en términos de $f(\xi, \rho, \theta) = 0$ en lugar de $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, o considerando las invariantes a través de la función $f(I_1, J_2, J_3) = 0$.

En estas condiciones al considerar las tres coordenadas (ξ, ρ, θ) , las cuales también pueden expresarse como $(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta)$ es posible simplificar el problema matemático, además de una mejor interpretación física.

Las coordenadas (ξ, ρ, θ) se denominan coordenadas Haigh-Westergaad, y para mayor claridad la representación gráfica se muestra en la figura (G.9). A la vez, estos tres importantes parámetros se definen a continuación:

ξ : es la distancia desde el origen de coordenadas hasta la proyección del punto $Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sobre un eje denominado "Eje Litostático", que corresponde a la línea sobre la cual todos los puntos de las tensiones principales tienen igual valor $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$. Adicionalmente representa la primera coordenada del espacio Haigh-Westergaad, y también se conoce como la longitud litostática (al tratarse de materiales como suelos y rocas). Debe indicarse que en los libros de plasticidad se indica como longitud hidrostática (hydrostatic length).

ρ : es la distancia desde el eje litostático hasta el punto Q en sentido perpendicular al referido eje. El plano perpendicular al eje que contiene a los puntos $Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y $M(p, p, p)$ se denomina plano desviador.

El valor de ρ constituye la segunda coordenada del espacio Haigh-Westergaad, y muchos autores lo mencionan como la longitud desviadora (deviatoric length).

θ : se conoce como el ángulo de Lode, y es el ángulo que se rota sobre el plano desviador a partir de σ'_1, σ'_2 y σ'_3 que son las proyecciones de los ejes principales sobre el plano desviador.

Para mayor detalle véase figura (G.9) y el cuadro adjunto.

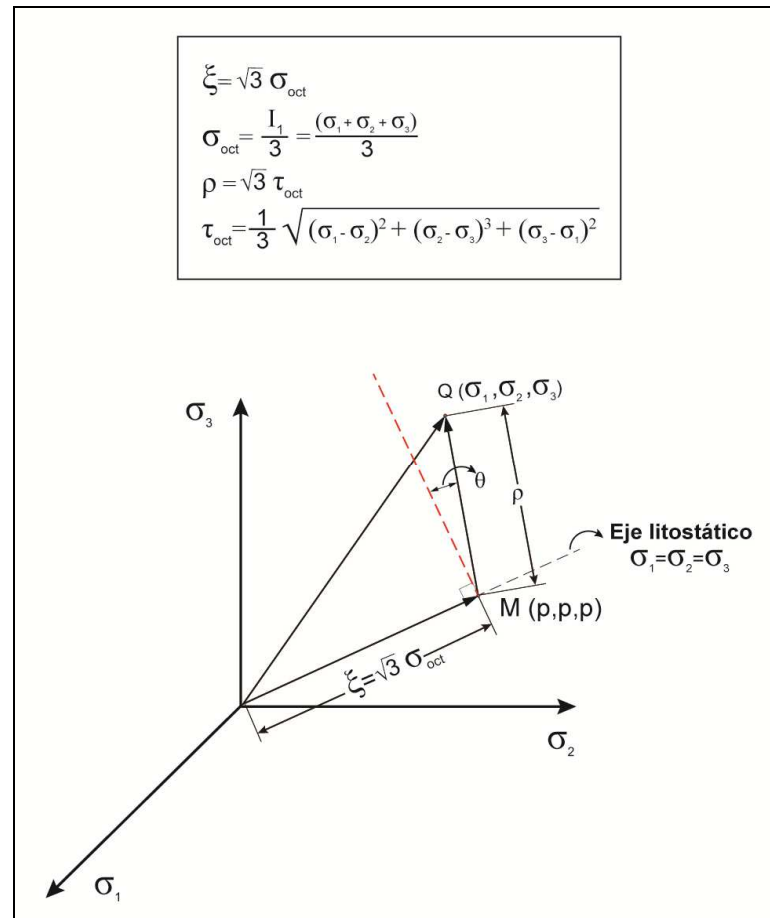


Figura G.9. Coordenadas (ξ, ρ, θ) en el referido espacio de tensiones de Haigh-Westergaard.

• Criterio de Drucker-Prager

Dos reconocidos investigadores como han sido D.C. Drucker y W. Prager proponen una superficie más suave con el objeto de evitar las esquinas de los hexágonos las cuales dificultan la solución numérica al aplicar en la solución numérica al aplicar el criterio de Mohr- Coulomb.

En su modelo, el cual es una modificación del criterio de von Mises las constantes se determinan en función de los parámetros de corte C y ϕ para la condición en la cual el círculo circunscribe el hexágono irregular de Mohr-Coulomb, o bien está inscrito dentro del hexágono.

Cabe señalar que esta extensión del criterio de rotura de von Mises se aplica en ciertos casos para determinar la resistencia de suelos.

La superficie de falla en el espacio de los esfuerzos principales es un cono y su traza en el plano desviador es un círculo.

Al considerar la ecuación (C.169) del apéndice C, el referido criterio puede expresarse a través de las ecuaciones:

$$f(\rho, \xi) = \rho - \sqrt{6} \cdot \alpha \cdot \xi - \sqrt{2} \cdot k = 0 \quad (\text{G.83})$$

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} \cdot \alpha \cdot I_1 - k = 0 \quad (\text{G.84})$$

Si el círculo circunscribe el hexágono de Mohr – Coulomb, las constantes α y k son:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad , \quad k = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{G.85})$$

$$\rho = \sqrt{6} \cdot \alpha \cdot \xi + \sqrt{2} \cdot k = 0 \quad (\text{G.86})$$

Teniendo en cuenta que $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_c$ y las constantes α y k , la última ecuación indicada se transforma:

$$\rho = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_c \left(\overbrace{\frac{2 \cdot \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)}}^{\alpha} \right) + \sqrt{2} \cdot \left(\overbrace{\frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)}}^k \right) = 0 \quad (\text{G.87})$$

Conociendo que $\sigma_c = 2C \cdot \cos \phi / (1 - \operatorname{sen} \phi)$ la ecuación (G.87) se reduce mediante simplificaciones a $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_c$. A través de este resultado se observa que el criterio de rotura es independiente de la invariante θ (ángulo de Lode), por lo tanto, la traza de la superficie de rotura en el plano

desviador es circular. Cabe destacar que este resultado se contradice con los valores experimentales realizados por varios investigadores en arenas y arcillas como lo mencionan Chen y Saleeb [1], demostrándose que la superficie es suave, curva, no circular y convexa.

A diferencia del criterio lineal de Mohr-Coulomb el modelo de Drucker-Prager considera la influencia del esfuerzo principal intermedio σ_2

• Criterio original de Hoek y Brown

Conociendo que la longitud desviadora es $\rho = \sqrt{2J_2}$, y teniendo en cuenta a la vez la expresión (C.175) del apéndice (C), se obtiene en función de las coordenadas Haigh-Westergaard la siguiente ecuación cuadrática:

$$\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)^2 \sin^2(\theta + 60^\circ) - \left(\frac{m}{6}\right)\left(\frac{I_1}{\sigma_c}\right) - \left(\frac{m}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right) \cos(\theta + 120^\circ) - \frac{s}{2} = 0 \quad (\text{G.88})$$

Siendo por tanto,

$$\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right) = \frac{\left(\frac{m}{\sqrt{6}}\right) \cos(\theta + 120^\circ) + \sqrt{\frac{m^2 \cos^2(\theta + 120^\circ) + 4 \sin^2(\theta + 60^\circ) \left(\frac{m \cdot I_1 + s}{6 \cdot \sigma_c}\right)}}{2 \sin^2(\theta + 60^\circ)} \quad (\text{G.89})$$

Para el caso particular que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_c, 0, 0)$ la primera invariante lineal $I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c$. Además si $s = 1$, se demuestra que para el meridiano

$\theta = 0^\circ$ y $\forall m$, la ecuación (G.89) se transforma en: $\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Por tanto, la longitud desviadora es independiente del parámetro m .

• Criterio de Úcar [5]

Nuevamente, partiendo que se conoce la segunda coordenada del espacio High-Westergaard $\rho = \sqrt{2J_2}$, y considerando a la vez la ecuación (C.226) del apéndice (C), se obtiene la expresión siguiente:

$$\left(\frac{I_1}{3\sigma_c}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)\cos\theta = k_1\left[\frac{I_1}{3\sigma_c} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)\cos(\theta+120^\circ) - \xi\right] + k_2\sqrt{\frac{I_1}{3\sigma_c} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)\cos(\theta+120^\circ) - \xi} \quad (\text{G.90})$$

$$\left(\frac{I_1}{3\sigma_c}\right)(1-k_1) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)\left[\cos\theta - k_1\cos(\theta+120^\circ)\right] + k_1 \cdot \xi = k_2\sqrt{\left(\frac{I_1}{3\sigma_c}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)(\cos(\theta+120^\circ) - \xi)} \quad (\text{G.91})$$

Elevando al cuadrado y simplificando, la ecuación anterior en función de las tres coordenadas Haigh -Westergaard (ξ , ρ , θ), resulta:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)^2\psi^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\rho}{\sigma_c}\right)\left[2 \cdot \Omega \cdot \psi - k_2^2\cos(\theta+120^\circ)\right] + \left[\Omega^2 - k_2^2\left(\frac{I_1}{3\sigma_c}\right) + k_2^2 \cdot \xi\right] = 0 \quad (\text{G.92})$$

Siendo

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{I_1}{3\sigma_c}\right)(1-k_1) + k_1 \cdot \xi \\ \psi &= \cos\theta - k_1\cos(\theta+120^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.93})$$

Siguiendo con el ejemplo número 2, la tabla anexa muestra los valores de la segunda y tercera coordenada, es decir ρ (longitud desviadora) y el ángulo de Lode θ en el espacio Haigh-Westergaard.

Por otra parte, se han variado los planos meridianos considerando $\theta=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ y 60° ; comparándose los resultados aplicando los criterios de Úcar y de Hoek y Brown (original)

Los parámetros utilizados son:

$$k_1=0,728,$$

$$k_2=3,253,$$

$$\sigma_c= 48,00 \text{ MPa},$$

$$\sigma_t = - 4,00 \text{ MPa},$$

$$\xi = (\sigma_t / \sigma_c) = - 0,0833, \quad m=12, \quad s = 1$$

Tabla G.2

θ (grados)	ρ (Criterio de Úcar) Valores en MPa	ρ (Criterio de Hoek y Brown). Valores en MPa
0	39,20	39,20
10	32,31	32,09
20	27,97	27,81
30	25,35	25,17
40	23,81	23,61
50	23,08	22,87
60	23,04	22,83

Cabe señalar que los valores de ρ son prácticamente iguales al emplear ambos criterios de rotura.

A través de la gráfica anexa se puede observar la traza de la superficie de falla en el plano desviador considerando el criterio de Mohr-Coulomb, Drucker Prager y el propuesto por Úcar [5]. Por otra parte, debe indicarse que en este último criterio en mencionar la traza coincide con la de Hoek y Brown.

Finalmente, en este nuevo modelo [5] la superficie de falla en el plano desviador corresponde a un triángulo ligeramente curvilíneo, cuya forma se aproxima suficientemente bien con los resultados reportados recientemente por A. Jaiswal y B.K. Shrivastva [6] al investigar nueve diferentes clases de rocas.

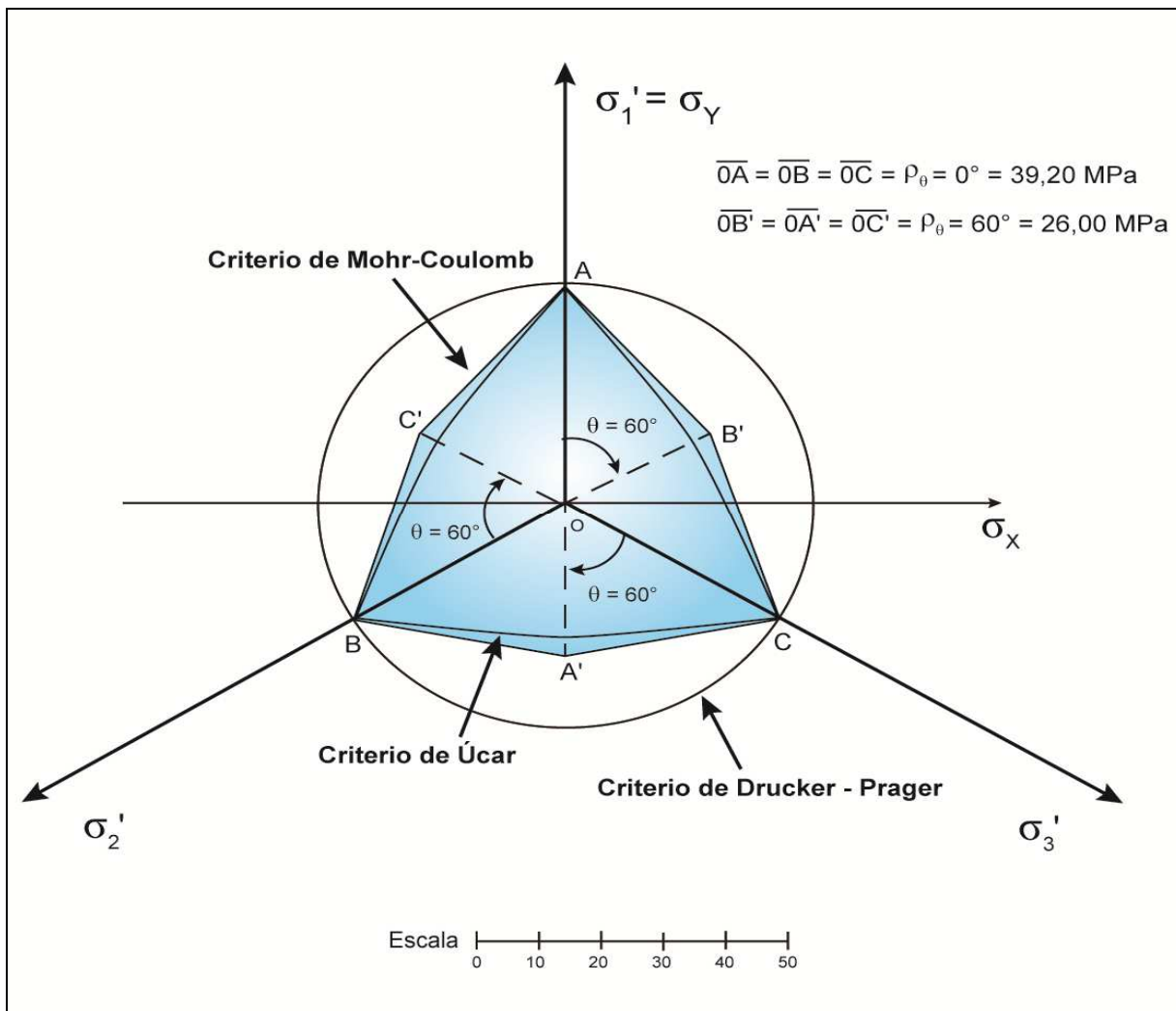


Figura G.10. Superficies de falla en el plano desviador considerando los criterios de rotura de Mohr-Coulomb, Drucker -Prager y Úcar.

6. REFERENCIAS

1. CHEN, W. F y SALEEB, A.F. (1982).: "Constitutive Equations for Engineering Materials". Volume 1: Elasticity and Modeling. John Wiley & Sons, 580p
2. CHEN, W. F., (1982).: "Plasticity in Reinforced Concrete". McGraw-Hill Book Company, 474p.
3. DAVIS, R. O y SELVADURAI, A. P. (2002).: "Plasticity and Geomechanics". Cambridge University Express, 287p
4. LADE, P.V y DUNCAN, J.M. (1975).: "Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil". J. Geotech. Eng. Div. ASCE, 101.
5. ÚCAR, R., (2011).: "Una Metodología Reciente para Determinar la Resistencia al Corte en Macizos Rocosos". Proceedings of Pan Am CGS Geotechnical Conference, Volumen 3, pp 2694-2700, Toronto, Canadá.
6. JAISWAL, A. y SHRIVASTVA, B.K. (2012).: "A Generalized Three-Dimensional Failure Criterion for Rock Masses". Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, pp 333-343.

